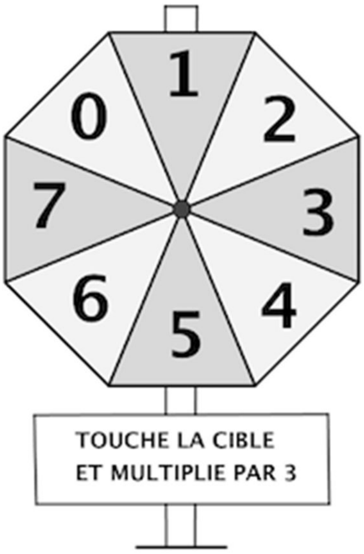
	Titre	*Catégorie*						*Origine*	*Domaine*
1	Cible multiplicatrice	**3**	**4**					RZ	Somme de triples de nombres
2	Fête foraine	**3**	**4**					GTCP	Arrangements de 3 éléments dont l'un est pris deux fois et l'autre une fois
3	Bande de papier	**3**	**4**	**5**				GTGE	Suite périodique sur un prisme
4	Trois photos sur une page	**3**	**4**	**5**				GTGP	Périmètres de 3 carrés
5	Cartes d'animaux	**3**	**4**	**5**				SI	Arithmétique, 3n + 3 = 17 + n
6	Le presse-papier suisse		**4**	**5**	**6**			GTGE	Comptage de cubes en 3D
7	Balance à plateaux			**5**	**6**	**7**		UD	Égalités de masses sur balance à plateaux
8	La tempête (I)			**5**	**6**	**7**		MI	Multiples 12 n = 16 (n – 2)
9	Les trois fourmis			**5**	**6**	**7**		GTAL	Trois équations dans N
10	Les cinq rectangles (I)				**6**	**7**		BB	Périmètre d'un rectangle composé de 4 rectangles
11	Une grande écurie (I)				**6**	**7**		GTAL	Trouver n tel que $900 < n^2 < 1100$
12	Le carrelage				**6**	**7**	**8**	BL	Pavage d'un rectangle avec des rectangles
13	La piscine					**7**	**8**	GTGP	Dalles sur le pourtour d'une piscine dont on connaît l'aire et le périmètre
14	Les petit chocolats						**8**	RV	Trouver a, b, c, d, e dont on connaît 5 sommes partielles
15	Une grande écurie (II)						**8**	GTAL	Trouver n tel que $900 < n^2 + n < 1100$
16	La tempête (II)						**8**	GTAL	Multiples de 16 : 16 (n – 2) = n (n + 4)
17	Les cinq rectangles (II)						**8**	BB	Rectangle d'aire maximale composé de 4 rectangles de périmètres donnés
18	Une mosaïque du Maroc						**8**	G0A0	Pavage

1. CIBLE MULTIPLICATRICE (Cat. 3, 4)

Au parc d'attractions de l'Ile Fleurie, il existe une cible assez particulière.

Lorsqu'on atteint la cible, on obtient un nombre de points qui est le triple du nombre inscrit dans la zone où la fléchette est arrivée.



À chaque partie, chaque joueur lance 3 fléchettes puis calcule le total des points.

Jacques et Laure font une partie.

À la fin de la partie, Jacques et Laure ont obtenu le même score : 27 points.

Leurs six fléchettes lancées sont toutes arrivées dans la cible et chaque fléchette a atteint une zone différente.

Une des fléchettes de Laure a atteint la zone avec le nombre le plus grand.

Dans quelles zones sont arrivées les fléchettes de Jacques ? et celles de Laure ?

Montrez les calculs que vous avez fait pour trouver vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Chercher deux couples de nombres différents compris entre 0 et 7 dont le triple de la somme est 27.

Analyse de la tâche

- Lire et s'approprier la situation et les règles du jeu : les six fléchettes atteignent six cases différentes (deux resteront vides) ; les points reçus sont les triples des nombres inscrits 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18 ou 21 ; chaque joueur doit obtenir 27 points avec trois flèches ; Laure a atteint la zone 7 qui lui donne 21 points avec une de ses fléchettes.
- Comprendre qu'il s'agit de rechercher deux fois trois nombres différents (deux triplets), parmi les nombres de points ci-dessus, dont la somme est 27 :
  - le premier choix avec 21 (pour Laure) est déjà déterminé ; il n'y a qu'une solution (21 + 0 + 6 = 27) ;
  - le deuxième choix parmi les nombres qui restent 3, 9, 12, 15 ou 18 est aussi déterminé (3 + 9 + 15 = 27).
- Revenir aux zones pour donner les deux réponses : 0, 2 et 7 pour Laure, 1, 3 et 5 pour Jacques.

Ou Répéter la même démarche en considérant les nombres de chaque zone dont la somme de 3 d'entre eux est 9, le tiers de 27, sans devoir prendre le triple de chacun.

Ou Travailler par essais successifs.

Niveaux : 3, 4

Origine : Rozzano

2. FÊTE FORAINE (Cat. 3, 4)

C'est la fête foraine. En plus des manèges il y a trois jeux installés.

- le jeu des fléchettes (F) ;
- le jeu de quilles (Q) ;
- le jeu de la pêche aux canards (C).

Aujourd'hui, il y a une offre spéciale de billets qui permet de jouer trois parties à deux jeux différents : deux fois à un même jeu et une fois à un autre, dans l'ordre écrit sur les billets.

Voici quelques exemples de billets :

F F C - pour jouer deux fois de suite aux fléchettes puis une fois à la pêche aux canards ;

F C F - pour jouer aux mêmes jeux mais dans un ordre différent: (aux fléchettes en premier, puis à la pêche aux canards et de nouveau aux fléchettes) ;

Q C C - pour une première partie du jeu de quilles puis deux parties de suite à la pêche aux canards.

Les 20 élèves de la classe de 5e de l'école voisine décident de profiter de l'offre spéciale et de jouer chacun trois fois : en jouant deux fois à l'un des jeux.

Ces 20 élèves pourront-ils avoir des billets tous différents ?

Dites pourquoi et montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver tous les arrangements de trois éléments différents dont l'un est répété deux fois

Analyse de la tâche

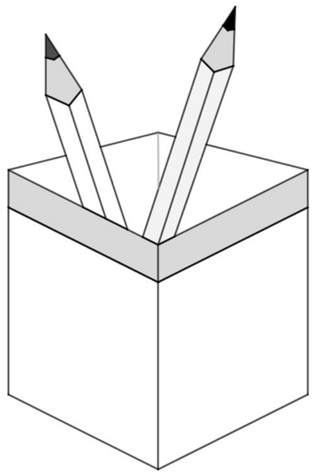
- Comprendre
  - que l'ordre dans lequel les jeux sont faits est noté par l'ordre des trois lettres sur le billet,
  - que chaque élève ne jouera qu'à deux jeux, deux fois à l'un et une fois à l'autre,
  - qu'il ne peut donc y avoir trois lettres différentes sur un billet ni trois fois la même lettre,
  - que deux billets (comme ceux des exemples) avec les mêmes jeux sont différents si l'ordre des jeux n'est pas le même
- Comprendre qu'il est nécessaire de chercher toutes les différentes possibilités pour arranger les lettres.
- Trouver les arrangements, un à un sans organisation ou de manière plus systématique en répétant par exemple deux fois la lettre C et en insérant l'une des deux autres (Q et F) en première, deuxième ou troisième position : QCC, CQC, CCQ, FCC, CFC, CCF puis reprendre en prenant Q, puis F comme double lettre.
- On obtient ainsi les 18 (3×6) arrangements possibles : QCC, CQC, CCQ, FCC, CFC, CCF - CQQ, QCQ, QQC, FQQ, QFQ, QQF – CFF, FCF, FFC, QFF, FQF, FFQ.
- En déduire qu'il n'y aura pas 20 billets différents pour la classe mais que certains élèves devront choisir des mêmes billets

Niveaux : 3, 4

Origine : Groupe de Travail Calculs et Proportionnalité (GTCP)

3. BANDE DE PAPIER (Cat. 3, 4, 5)

Rosa a un nouveau porte-crayons, avec quatre faces égales dont chacune a un bord gris dans la partie supérieure, comme on le voit sur la figure ci-dessous.



Rosa décore le bord gris avec une bande de papier sur laquelle elle dessine et colorie des symboles.

Voici le début de son travail :

Quand elle arrive à l'étoile, elle recommence avec le carré, puis elle continue avec les deux cercles, les trois triangles et l'étoile, ainsi de suite jusqu'à ce qu'elle constate que sa bande est assez longue pour recouvrir tout le bord gris du porte-crayons.

Rosa colle sa bande en commençant pas le carré. Après l'avoir collé, elle observe que sur chacune des quatre faces il y a exactement 9 symboles. Tous sont toujours entiers et aucun symbole n'en recouvre un autre.

Quel est le symbole qui termine la bande collée autour du bord du porte-crayons ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le dernier élément d'une frise de 7 éléments qui entoure les quatre faces latérales d'un prisme, sachant qu'il y a exactement 9 éléments de la frise sur chaque face.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le porte-crayons a toutes ses faces latérales égales, qu'il faudra le décorer sur le bord gris au haut de chaque face et que la séquence de 7 symboles se répète toujours selon la même période.
- Comprendre qu'il y a 36 (9×4) symboles sur la bande.
- Dessiner une bande des 36 symboles en respectant la période de 7 formes et s'apercevoir ainsi que le dernier est un carré.

Ou, en travaillant dans le domaine numérique. Étant donné que la période de la séquence est constituée de 7 symboles et que sur chaque face il y en a 9, raisonner sur les symboles qui apparaissent sur chaque face et trouver que la bande se termine par le carré qui est le premier symbole de la séquence. Ceci peut s'obtenir par exemple par ces deux procédures :

$4 \times 9 = 36$; $36 \div 7 = 5$ avec un reste de 1

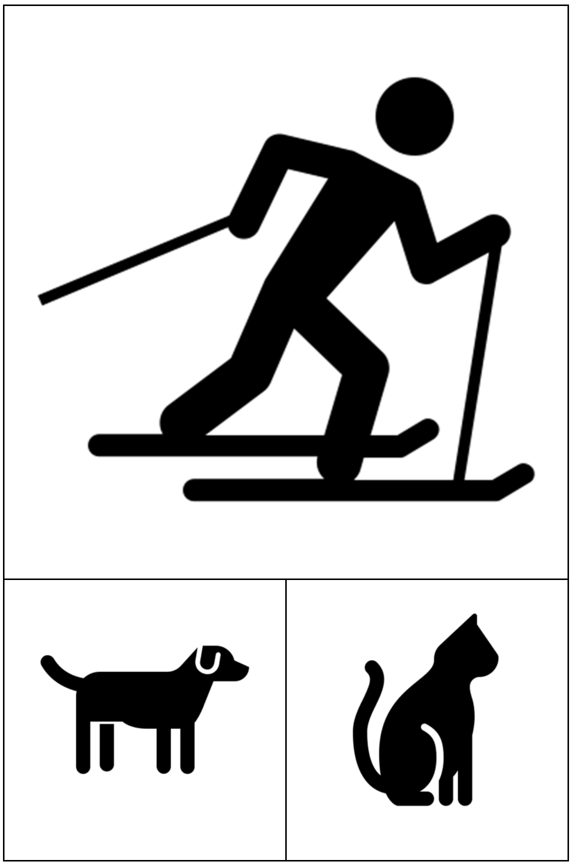
$9 \times 4 = 36$; $7 \times 4 = 28$; $36 - 28 = (7 + 1)$

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Groupe Géométrie dans l'espace (GTGE)

4. TROIS PHOTOS SUR UNE PAGE (Cat. 3, 4, 5)

Roberto a collé 3 photos carrées sur une page de son album : une grande où il fait du ski de fond et deux petites, l'une de son chat et l'autre de son chien.



Les trois photos carrées recouvrent entièrement la page de l'album.

Le pourtour de la grande photo mesure 48 cm.

Combien mesure le pourtour de la page sur laquelle sont collées les trois photos ?

Montrer comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le périmètre d'un assemblage rectangulaire composé d'un grand carré de 48 cm de périmètre et de deux petits carrés égaux.

Analyse de la tâche

- Observer la position des trois carrés, remarquer que les deux petits carrés doivent être égaux, que leur côté est la moitié du grand et que les trois carrés forment un rectangle, qui est la page de l'album.
- Se rappeler que le périmètre ou pourtour est une longueur, égale à la somme des longueurs de tous les côtés de la figure : que, dans le cas du carré, la relation est « le périmètre est égal à la somme des quatre côtés » et dans le cas du grand rectangle « le périmètre est égal à la somme des quatre côtés du grand carré et de deux côtés des petits carrés ». Comprendre qu'il sera nécessaire de calculer les mesures des côtés des carrés.
- Déduire des données que le pourtour du grand carré, composé de quatre segments (côtés) égaux permet de calculer la mesure d'un de ses côtés par une division par 4. $48 \div 4 = 12$ (cm). En tirer ensuite la longueur d'un côté des petits carrés : 6 cm.
- Calculer la mesure du pourtour du grand rectangle par additions et/ou multiplications : $12 \times 3 + 6 \times 4 = 60$.

Ou, comprendre , en observant le dessin, que le grand carré est équivalent à quatre petits carrés et que, par conséquent, son pourtour est équivalent à huit côtés des petits carrés. Calculer alors la longueur de ses côtés : 6 cm (48 : 8).

- Observer que le pourtour de la feuille est constitué de dix segments de 6 cm puis calculer le périmètre : 60 cm (6×10).

Ou, faire un dessin en vraie grandeur et mesurer les côtés du grand rectangle.

Niveaux : 3, 4, 5 **Origine :** Groupe géométrie plane (GTGP)

5. CARTES D'ANIMAUX (Cat. 3, 4, 5)

Charles et Luc collectionnent des cartes d'animaux.

Pour compléter leur collection, ils achètent des paquets qui contiennent tous le même nombre de cartes.

Luc a 17 cartes et il a encore un paquet de cartes à ouvrir.

Charles, qui vient de commencer sa collection, n'a que 3 cartes et trois paquets à ouvrir.

Après avoir ouvert tous ses paquets, chaque enfant compte toutes les cartes qu'il a.

Charles et Luc constatent qu'ils ont maintenant le même nombre de cartes.

Combien de cartes chaque enfant a-t-il maintenant ?

Expliquez comment vous êtes arrivés à votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver la somme de 17 et d'un nombre inconnu, qui est aussi égale à la somme de 3 et de trois fois le nombre inconnu.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a des cartes déjà placées dans la collection et d'autres cartes dans les paquets qui sont encore à ouvrir et qu'il faudra déterminer le nombre total de ces cartes pour chaque enfant.

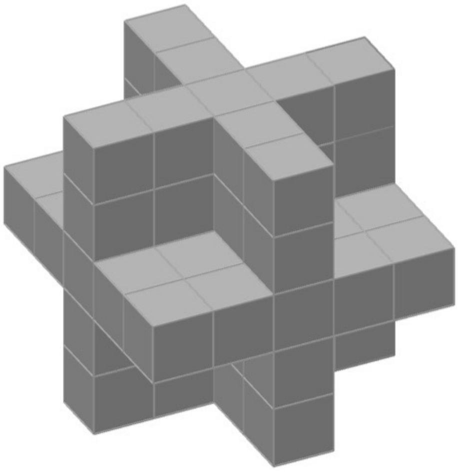
  Comprendre la situation : au départ, Charles n'avait que trois cartes et trois paquets à ouvrir, tandis que Luc avait déjà 17 cartes et un seul paquet à ouvrir.
- Noter qu'après l'ouverture des paquets, les deux enfants ont le même nombre de cartes, et que l'égalité se situe entre « 17 + un paquet » et « 3 + trois paquets »
- Comprendre qu'il faut trouver le nombre de cartes que contient chaque paquet
  - soit par comparaison globale à partir de l'égalité précédente : Luc a 14 cartes de plus que Charles mais deux paquets de moins et, par conséquent 2 paquets correspondent aux 14 cartes et un paquet contient 7 cartes.
  - soit par essais, en constatant que le seul nombre de cartes par paquet qui convient est 7.
- Conclure, dans tous les cas, que chaque enfant a 24 cartes.

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Siena

6. LE PRESSE-PAPIER SUISSE (Cat. 4, 5, 6)

Dans une vitrine, il y a un presse-papier que vous voyez sur l'image, composé de nombreux cubes magnétiques.



Julie le prend en main, le tourne et le retourne et remarque ainsi que les parties non visibles sur la figure sont parfaitement les mêmes que celles que l'on y voit.

Elle se rend compte qu'on peut compter les cubes qui forment le presse-papier sans le démonter.

De combien de cubes le presse-papier est-il formé ?

Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le nombre de cubes formant un polyèdre non convexe inscrit dans un cube, (ayant lui-même les mêmes axes et plans de symétrie que le cube)

Analyse de la tâche

- Observer la figure et comprendre que la partie invisible sur le dessin est la même que la partie visible.
- Comprendre que le presse-papier est formé de cinq couches de cubes : quatre identiques en forme de croix et d'une couche centrale en forme de carré (si on admet que qu'il n'y a pas de vide à l'intérieur*).
- Compter les cubes : dans chaque « croix » il y en a 9 ; $9 \times 4 = 36$ et dans la couche centrale $5 \times 5 =$ et conclure qu'il y a en tout $36 + 25 = 61$ cube

Ou, comprendre que le presse-papier peut être inscrit dans un cube « imaginaire » dont le côté vaut 5 fois le côté d'un cube magnétique et a donc pour volume $5^3 = 125$ cubes. Comprendre alors que le volume du presse-papier est donné par la différence entre le volume du cube imaginaire et celui des 8 cubes de côté 2, qui ont été retirés des huit sommets du cube imaginaire ($125 - 2^3 \times 8 = 61$).

On peut imaginer de nombreux autres manières de dénombrer les cubes.

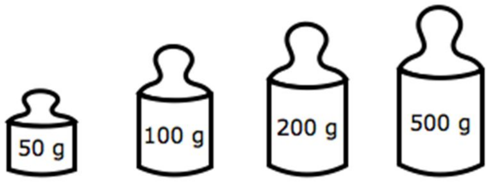
Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Groupe Géométrie dans l'espace (GTGE)

7. BALANCE À PLATEAUX (Cat 5, 6, 7)

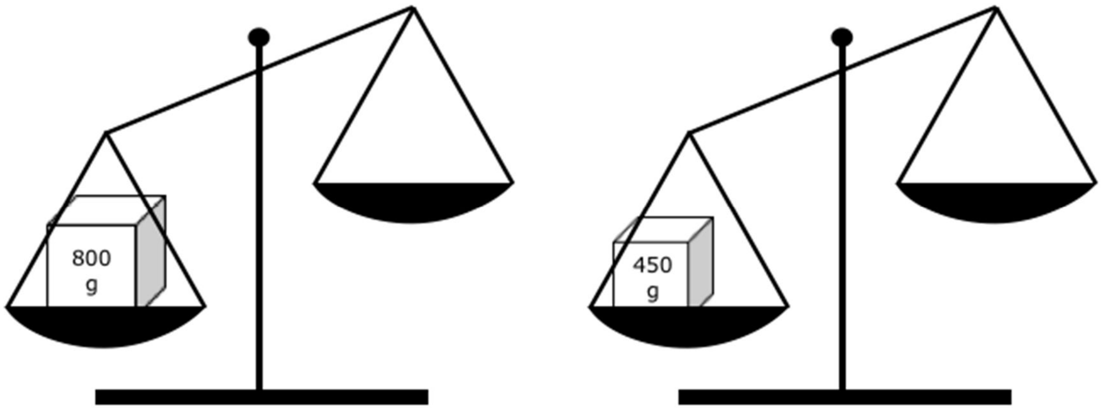
Anne cherche à mettre en équilibre les plateaux d'une balance.

Elle dispose d'un poids de 50 grammes, un de 100 grammes, un de 200 grammes et un de 500 grammes



De quelles manières Anne pourrait mettre en équilibre les plateaux de la balance de gauche où elle a déjà placé un paquet de 800 g et la balance de droite où elle a déjà placé un paquet de 450 g.

(Dans chacun des deux cas vous pouvez utiliser un, deux, trois ou les quatre poids à disposition)



Pour chacun des deux cas, indiquez toutes les manières possibles d'équilibrer la balance.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Compléter deux égalités dont un terme est déjà donné : 800, 450, en utilisant à chaque fois un ou plusieurs de quatre autres nombres donnés : 50, 100, 200, 500.

Analyse de la tâche

- Savoir qu'une balance à plateaux est en équilibre lorsque la masse présente sur un plateau est égale à celle présente sur l'autre plateau.
- Comprendre les données du problème : Anne dispose de 4 poids pour chaque balance, et pour chaque cas elle doit choisir parmi eux lesquels utiliser pour équilibrer la masse présente sur l'autre plateau ; chaque poids ne pouvant être utilisé pour chaque cas qu'une seule fois.
- Comprendre qu'on peut mettre la balance en équilibre soit en ajoutant des poids sur le plateau vide, soit en ajoutant des poids sur les deux plateaux.
- Procéder cas par cas, pour élaborer les égalités possibles.

  Une seule possibilité pour le 1er cas : **800 = 500 + 200 + 100**

  Trois possibilités pour le 2ème cas : **450 + 50 = 500** ou **450 + 100 = 500 + 50** ou **450 + 200 = 500 + 100 + 50**

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Udine

8. LA TEMPÊTE (I) (Cat. 5, 6, 7)

À “Horizon Plage”, les parasols étaient habituellement disposés en rangées de 12.

Cette année, cependant, après une tempête, la mer a recouvert une partie de la plage et il a fallu retirer les deux rangées de parasols les plus proches de la mer.

Pour placer tous les parasols, on en a ajouté 4 dans chaque rangée qui restait.

Combien y a-t-il de parasols à “Horizon Plage” ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le produit de 12 et d’un nombre x qui est aussi le produit de 16 et de x - 2

Analyse de la tâche

- Comprendre que le nombre total de parasols est le même que l’année précédente.
- Comprendre que le nombre de rangées, de l’ancienne disposition valait 2 de plus que celui de la nouvelle.
- Comprendre que le nombre de parasols à réorganiser est 24 (= 2 × 12).
- Comprendre que si on divise ce nombre par 4 on obtient le nombre de rangées restantes (6).
- Calculer le nombre de parasols par rangée dans la nouvelle disposition (12 + 4 = 16).
- Calculer pour terminer le nombre total de parasols (6 × 16 = 96).

Ou, après avoir compris qu’il y a 24 parasols à replacer à raison de 4 par rangée, dessiner un rang de 12 + 4 parasols et continuer jusqu’à ce que les 24 parasols soient tous replacés (sur 6 rangs).

- Puis calculer le nombre total de parasols (6 × 16 = 96)

Ou, comparer les deux situations pour visualiser les parasols avant et après la tempête

	avant	après	
1e rang	12	12 + 4 = 16	
2e rang	24	24 + 8 = 32	
3e rang	36	36 + 12 = **48**	Non acceptable parce qu’il y a un seul rang de moins
4e rang	**48**	48 + 16 = 64	
5e rang	60	60 + 20 = 80	
6e rang	72	72 + 24 = **96**	Acceptable parce qu’il y a deux rangs de moins
7e rang	84	84 + 28 = 112	
8e rang	**96**		

Ou Comprendre qu’il y a 16 parasols par rang dans la nouvelle disposition.

- Procéder par essais en cherchant un multiple commun de 12 et 16 tel que ce soit le n^e de 16 et le $(n + 2)^e$ de 12.
- Trouver que ce multiple est 96 et vérifier qu’il n’y a pas d’autres solutions.

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Milano

9. LES TROIS FOURMIS (Cat 5, 6, 7)

Les fourmis Adeline, Bérénice et Clotilde comptent les grains de blé qu'elles ont apportés dans la fourmilière.

- Clotilde et Bérénice ont apporté le même nombre de grains de blé.
- Clotilde en a apporté 7 de plus qu'Adeline.
- À Bérénice, il manque 5 grains pour avoir le double du nombre de grains apportés par Adeline.

Combien de grains de blé chaque fourmi a-t-elle apportés ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver trois nombres naturels tels que le deuxième vaut 5 de moins que le double du premier, que le troisième et égal au deuxième et vaut 7 de plus que le premier.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'Adeline a rapporté moins de grains que les autres fourmis, Clotilde en a 7 de plus et Bérénice la même quantité que Clotilde.
- Comprendre qu'il manque 5 grains à Bérénice pour avoir deux fois ceux d'Adeline et en même temps (puisqu'elle a le même nombre de grains que Clotilde) elle en a 7 de plus qu'Adeline.
- Puis déduire que 5 + 7 = 12 est exactement le nombre des grains qui, ajoutés à ceux d'Adeline, permettent d'atteindre son double. Conclure qu'Adeline a recueilli 12 grains, tandis que Bérénice et Clotilde ont recueilli 12 × 2 – 5 et 12 + 7 respectivement, soit 19 grains chacune.

  Cette conclusion peut être obtenue avec une représentation graphique.

Ou procéder à des tentatives systématiques en tenant compte du fait que les grains d'Adeline ne peuvent pas être inférieurs à 3. Par exemple, si les grains collectés par Adeline étaient au nombre de 7, Bérénice en aurait 9 (7 × 2 – 5), et Clotilde 14 (7 + 7), mais 9 ≠ 14 et donc 7 n'est pas le bon nombre. Procéder ainsi et constater que si Adeline ramène 12 grains, Bérénice en recueille 19 (12 × 2 – 5), et Clotilde aussi (12 + 7).

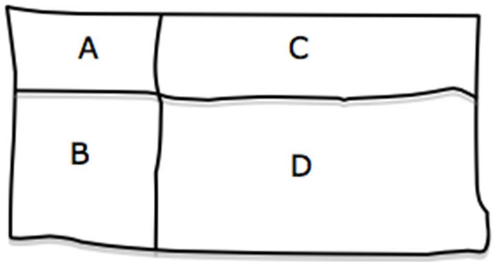
Ou par une méthode algébrique ou pré-algébrique, noter A le nombre de grains apportés par Adeline. Bérénice en a 2A – 5 et Clotilde A + 7. Comparer les deux dernières expressions des nombres de grains de Bérénice et de Clotilde : 2A – 5 = A + 7 et en déduire, en résolvant l'équation par des méthodes algébriques ou par essais, que le nombre de grains d'Adeline est égal à 12. Par conséquent, les deux autres fourmis en ont 19.

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Groupe Algèbre (GTAL) (reprise du problème *Concours de pêche*, 24.II.10)

10. LES CINQ RECTANGLES (I) (Cat. 6, 7)

Le professeur demande à ses élèves de construire chacun quatre rectangles A, B, C, D dont les périmètres sont 10 cm (A), 14 cm (B), 20 cm (C) et 24 cm (D) et de les disposer comme sur cette figure esquissée au tableau noir pour former un grand rectangle qui les contient tous.



Puis il leur demande de calculer le périmètre du grand rectangle qu'ils ont obtenu.

Clara a commencé par dessiner le rectangle (A) de 10 cm de périmètre, puis elle a dessiné les trois autres rectangles de 20 cm, 14 cm et 24 cm de périmètre. Ensuite, elle a calculé le périmètre du grand rectangle qui contient les quatre rectangles dessinés.

Georges a aussi commencé par dessiner le rectangle A de 10 cm de périmètre, mais avec des dimensions différentes de celui de Clara, puis il a dessiné les trois autres rectangles et calculé le périmètre du grand rectangle.

Puis Daniela a aussi choisi un rectangle de 10 cm de périmètre, différent ou dans une autre position que ceux de Clara et Georges puis elle a calculé le périmètre du grand rectangle.

Combien mesurent les trois périmètres des grands rectangles de Clara, Georges et Daniela ?

Montrez tous les calculs que vous avez faits.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Former des rectangles composés chacun de quatre rectangles de périmètres 10, 14, 20 et 24 cm, et déterminer leurs périmètres.

Analyse de la tâche

- Observer la figure et comprendre pourquoi il y a différents rectangles, soit de 10, soit de 14, soit de 20 et soit de 24 cm de périmètre (ils peuvent tous être plus ou moins « allongés »).
- Comprendre que si on choisit la longueur d'un côté du rectangle de 10 cm de périmètre, la longueur de l'autre côté est déterminée et peut se calculer par la relation : le périmètre est la somme des quatre longueurs des côtés, deux largeurs et deux longueurs. Par exemple :

  si l'on choisit 1 cm pour l'un des côtés, la mesure de l'autre sera 4 cm ($10 = 2 \times 1 + 2 \times 4$)

  si l'on choisit 2 cm pour l'un des côtés, la mesure de l'autre sera 3 cm ($10 = 2 \times 2 + 2 \times 3$)

  … (et on peut aussi choisir des nombres non entiers)
- Constater que la largeur du rectangle de 10 cm de périmètre est aussi celle de son voisin de 20 cm de périmètre et les choix précédents donnent un rectangle de 1 cm sur 9 cm pour le premier choix et un rectangle de 2 cm sur 8 cm, pour le second
- Effectuer les mêmes constatations pour le rectangle de 14 cm de périmètre dont la longueur est la même que celle du premier ce qui conduit à un rectangle de 3 cm sur 4 cm pour le premier choix et un rectangle.

  de même pour les rectangles de 24 cm de périmètre : de 3 cm sur 9 cm pour le premier choix et de 4 cm sur 8 cm pour le second.
- Utiliser les mesures des côtés de chaque petit rectangle pour calculer le périmètre du grand rectangle :

  pour le premier choix : $2 \times [(4 + 9) + (1 + 3)] = 34$ cm

  pour le second choix : $2 \times [(3 + 8) + (2 + 4)] = 34$ cm

  et constater que ces deux périmètres sont égaux.

- Vérifier que, avec d'autres choix pour un côté du premier rectangle de 10 cm de périmètre, on obtient encore 34 cm pour le périmètre du grand rectangle. Par exemple avec 1,5 (ou 3) comme troisième choix : 1,5 sur 3,5 (ou 3 sur 2) ; 1,5 sur 8,5 (ou 3 sur 7) ; 3,5 sur 3,5 (ou 5 sur 2) et 3,5 sur 8,5, (ou 5 sur 7) le périmètre du grand rectangle est : 2 × [(3.5 + 8,5) + (1,5 + 3,5)] = 34 cm (ou 2 × [(2 + 7) + (3 + 5)]) = 34). (la démonstration ou une justification de cette propriété n'est pas demandée).

Niveaux : 6, 7

Origine : Bourg-en-Bresse

11. UNE GRANDE ÉCURIE (I) (Cat. 6, 7)

Arthur travaille dans une écurie où, pour rendre le poil de ses chevaux plus brillant, on ajoute à leurs aliments des carottes, dont les chevaux sont friands.

Au début de la semaine, Arthur a acheté 11 sacs de 100 carottes chacun.

À la fin de la semaine le dernier sac n'a pas été entièrement consommé et Arthur se rend compte d'une coïncidence curieuse : chaque cheval a mangé autant de carottes qu'il y a de chevaux dans l'écurie.

Combien peut-il y avoir de chevaux dans l'écurie d'Arthur ?

Écrivez toutes les possibilités et montrez comment vous avez fait pour les trouver.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les nombres qui, multipliés par eux-mêmes donnent un produit compris entre 1000 et 1100.

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que, puisque chaque cheval a mangé un nombre n de carottes égal à celui des chevaux de l'écurie, le nombre de carottes consommées par tous les chevaux est $n \times n$.
- Comprendre que ce nombre ($n \times n$) doit être plus petit que 1100 (=11 × 100), nombre des carottes acquises, et plus grand que 1000, rechercher ce nombre par essais successifs à partir d'un nombre de chevaux hypothétique (par exemple 25 chevaux qui mangeraient en tout 625 carottes) et poursuivre jusqu'à l'obtention d'un nombre de carottes mangées compris entre 1000 et 1100.
- Trouver ainsi qu'il y a deux résultats possibles : **32** et **33** dont les carrés sont respectivement 1024 et 1089, et que ce sont seulement ceux-ci parce que $31^2 = 961 < 1000$ alors que $34^2 = 1156 > 1100$

Ou, calculer la racine carrée de 1000 (environ 31,6) et de 1100 (environ 33,2) et observer que les seuls nombres entiers compris entre les deux nombres obtenus sont 32 et 33.

- Conclure que dans l'écurie il peut y avoir 32 ou 33 chevaux

Niveaux : 6, 7

Origine : Groupe Algèbre (GTAL)

12. LE CARRELAGE (Cat. 6, 7, 8)

Monsieur François a carrelé le sol rectangulaire de son nouveau magasin, dont les dimensions sont 9 mètres sur 18 mètres.

Il a acheté un nombre de carreaux compris entre 200 et 1000 et n'a utilisé que des carreaux entiers.

Les carreaux sont tous identiques : ils sont rectangulaires, une des dimensions est le double de l'autre et leurs mesures en décimètre sont des nombres entiers.

Quelle peuvent être les dimensions des carreaux ?

Explíquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE APRIORI

Tâche mathématique

Trouver les dimensions possibles, en nombre entiers de décimètres, de carreaux rectangulaires dont la longueur est le double de la largeur, sachant qu'il en faut entre 200 et 1000 pour recouvrir un rectangle de 9 m sur 18 m.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le sol à recouvrir et les carreaux sont des rectangles dont la longueur est le double de la largeur et que, par conséquent, les carreaux peuvent être posés, dans la position la plus simple par exemple, avec leurs longueurs et largeurs respectivement parallèles à celles du sol à recouvrir.
- Choisir de travailler avec une même unité, pour les dimensions du sol à recouvrir et les carreaux, de préférence en dm : le rectangle de 90 × 180 dm a une aire de 16200 dm^2.
- Noter que les dimensions des carreaux doivent mesurer un nombre entier de décimètres et que, comme on n'utilise que des carreaux entiers, leur longueur doit être un diviseur de 180 (dm), de même que pour leur largeur qui est un diviseur de 90 (dm).

  Il y a plusieurs manières d'organiser la recherche, dont les trois suivantes. Par exemple :

  a) En partant de l'aire du sol 16200 (en dm^2) et de 200 à 1000 carreaux, calculer les aires minimales et maximales de carreaux qui sont 16200 /1000 = 16,2 (en dm^2) et 16200/200 = 81 (en dm^2).

  Les carreaux étant décomposables en deux carrés juxtaposés, les aires de ces carrés sont comprises entre 16,2/2 = 8,1 et 81/2 = 40,5 (en dm^2). Les côtés de ces carrés (largeur du carreau) sont compris entre $\sqrt{8,1} \approx 2,8$ et $\sqrt{40,5} \approx 6,3$.

  Comme les dimensions des carreaux sont des nombres entiers, on peut envisager les couples **(3 ; 6)**, (4 ; 8), **(5 ; 10)** et **(6 ; 12)** pour les (largeurs ; longueurs) des carreaux, et éliminer (4 ; 8) qui ne sont pas des diviseurs de 90 et 180.

  b) En partant des diviseurs de 90 et 180 pour trouver les largeurs et longueurs des carreaux et en calculant le nombre de carreaux à chaque fois :

Diviseurs	*Dimensions car.*	*Nb. total car.*	*Solutions acceptables*
1 et2	90	$90^2 = 8100$	Non
2 et 4	45	$45^2 = 2025$	Non
3 et 6	**30**	$\mathbf{30^2 = 900}$	**Oui**
5 et 10	**18**	$\mathbf{18^2 = 324}$	**Oui**
6 et 12	**15**	$\mathbf{15^2 = 225}$	**Oui**
9 et 18	10	$10^2 = 100$	Non
…			

  c) Organiser une recherche à partir de paires de valeurs entières dont l'une est le double de l'autre et dont le produit est contenu un nombre exact de fois dans damier du salon. Par exemple, à partir des tailles 1 et 2, la surface de la tuile sera de 2 dm^2 et le nombre des tuiles sera de 8100 (16200 : 2).

  Continuer avec les autres paires de valeurs et n'accepter que les cas où le nombre de carreaux est un entier supérieur à 200 et inférieur à 1000.

  Identifier les trois solutions possibles 900 = 16 200 ÷ (**3 × 6**) ; 324 = 16 200 ÷ (**5 × 10**) ; 225 = 16 200 ÷ (**6 × 12**)

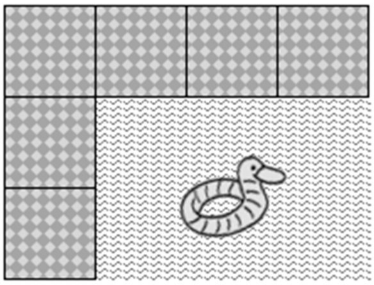
Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Belluno

13. LA PISCINE (Cat. 7, 8)

Mathieu a une piscine rectangulaire dont l'aire est 176 m^2. Il décide de l'entourer d'une bordure de dalles carrées de 50 cm de côté. Il dispose les 124 dalles qu'il a achetées l'une à côté de l'autre le long du bord sans laisser d'espace entre elles. Il ne coupe aucune dalle.

Voici le début de son travail.



Combien y a-t-il de dalles sur la longueur du rectangle formé par la bordure et la piscine ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer les dimensions d'un rectangle connaissant son aire, le nombre et les dimensions des dalles carrées nécessaires pour paver son pourtour extérieur.

Analyse de la tâche

- Savoir que l'aire d'un rectangle s'obtient en faisant le produit de ses deux dimensions.
- Comprendre que le périmètre de la piscine, en prenant le côté d'un dalle pour unité, s'obtient en retirant 4 du nombre total de dalles.
- Observer que le demi-périmètre de la piscine, dans cette unité de mesure, est 60 (30 en mètres) et que par conséquent les nombres de dalles, dans la longueur comme dans la largeur, doivent être tous les deux pairs ou tou les deux impairs. Exclure cette seconde éventualité puisque l'aire est un nombre pair (en m^2)
- En déduire que la longueur et la largeur de la piscine ne peuvent être que des nombres entiers.
- Procéder par essais et ajustements :
  - Soit en cherchant deux nombres entiers pairs dont le produit est égal à 176, et dont la somme est 30 (en s'aidant éventuellement de la décomposition de 176 en facteurs.
  - Soit après avoir retiré 4 au nombre total de dalles (124 – 4 = 120), calculer le périmètre du rectangle en m (120 × 0,5 = 60) et déterminer deux nombres entiers dont la somme est égale à 30 et le produit 176.
  - Soit après avoir retiré 4 au nombre total de dalles (124 – 4 = 120), déterminer deux nombres entiers dont la somme est 120 : 2 = 60, multiplier chacun de ces nombres par 0,5 pour obtenir deux dimensions correspondantes du rectangle. Effectuer ensuite le produit de ces deux nombres et le comparer à 176.
- Procéder comme précédemment mais en effectuant une recherche systématique qui, éventuellement, n'exclut pas la possibilité de nombres impairs de dalles par côté. Par exemple : considérer tous les couples de nombres compatibles avec les dimensions des dalles dont le produit est égal à 176 : 0,5 × 352 ; 1 × 176 ; 2 × 88 ; 4 × 44 ; 5,5 × 32 ; 8 × 22 ; 11 × 16 et vérifier si pour chacun des couples trouvés le nombre correspondant de carrés de 0,5 m de côté est égal à 124. Par exemple pour (0,5 ; 352) : (0,5 : 0,5 + 352 : 0,5) x 2 + 4 = 1414. Trouver que le seul couple solution est (8 ; 22) et que par conséquent il y a 22 : 0,5 + 2 = 46 dalles sur la longueur.
- Mettre le problème en équations. Si a désigne la largeur de la piscine et b sa longueur, arriver à $a + b = 30$ et $a \times b = 176$. Procéder par essais et ajustements pour trouver a et b ou résoudre l'équation correspondante $a^2 - 30a + 176 = 0$ dont les solutions sont 22 et 8.
- Ou factoriser 176 pour trouver les dimensions, en mètres, de la piscine : 11 × 16, 22 × 8, 44 × 4, 88 × 2, 176 × 1 et retenir 22 × 8 qui est la seule conduisant à 124 dalles.
- Les dimensions de la piscine sont 22 m et 8 m et il y a 46 dalles dans la longueur.

Niveaux : 7, 8

Origine : Groupe Géométrie Plane (GTGP)

14. LES PETITS CHOCOLATS (Cat. 8)

Sur un rayon d'une pâtisserie, il y a cinq boîtes de chocolats alignées. Aldo, le gérant de la pâtisserie et passionné de jeux mathématiques, propose à quelques-uns de ses amis l'énigme suivante :

« - la première et la deuxième boîtes contiennent ensemble 27 petits chocolats ;
- la deuxième et la troisième boîtes contiennent ensemble 31 petits chocolats ;
- la troisième et la quatrième boîtes contiennent ensemble 26 petits chocolats ;
- la quatrième et la cinquième boîtes contiennent ensemble 18 petits chocolats ;
- la somme des chocolats contenus dans la première, la troisième et la cinquième boîtes est 36.

Celui qui réussira à trouver le nombre total de chocolats contenus dans les cinq boîtes les recevra toutes en récompense. »

Quel est le nombre total des petits chocolats contenus dans les cinq boîtes ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE PRIORI

Tâche mathématique

Trouver la somme de 5 nombres naturels a, b, c, d, e dont on connaît les sommes partielles : $a + b = 27$; $b + c = 31$; $c + d = 26$; $d + e = 18$; $a + c + e = 36$.

Analyse de la tâche

- Comprendre les données du problème : trouver le nombre de chocolats de chaque boîte et les additionner, connaissant les sommes des nombres de chocolats contenus dans quelques-unes des cinq boîtes.
- Procéder par essais successifs, par exemple en choisissant le nombre de chocolats de la première boîte, déduisant le nombre de ceux de la deuxième boîte et ainsi de suite pour vérifier si les résultats vérifient la dernière relation.

Ou Observer que dans les sommes partielles exprimées dans l'énoncé les première, deuxième, quatrième et cinquième boîtes apparaissent deux fois alors que troisième apparaît trois fois.

- Déduire que 138 = 27 + 31 + 26 + 18 + 36 est la somme du double du nombre des chocolats de la première, deuxième, quatrième et cinquième boîtes et du triple du nombre de ceux de la troisième boîte.
- Se rendre compte, de la première et de la quatrième données, que la somme du nombre des chocolats contenus dans les première, seconde, quatrième et cinquième boîtes 45 = (27 + 18) dont le double est 90.
- Trouver alors que 138 - 90 = 48 est le triple du nombre de chocolats contenus dans la troisième boîte, qui contient par conséquent 16 (= 48 : 3) chocolats.
- En conclure que les cinq boîtes contiennent 45 + 16 = 61 chocolats ou déterminer ce nombre par substitutions successives de 16 dans les relations données.

Ou De la première et deuxième données, déduire que la troisième boîte contient 4 chocolats de plus que la première, puis de la troisième et quatrième données que la cinquième boîte en contient 8 de moins que la troisième et que par conséquent si x est le nombre de chocolats de la première boîte, la troisième en contient $x + 4$ et la cinquième $x + 4 – 8 = x – 4$; puis, selon la dernière donnée $x + x + 4 + x – 4 = 36$ d'où $3x = 36$ et finalement $x = 12$, nombre de chocolats de la première boîte. Déduire alors successivement le nombre de chocolats de la deuxième boîte (15), de la troisième (16), de la quatrième (10), et de la cinquième (8).

Ou Par voie algébrique, avec les nombres de chaque boîte a, b, c, d, e, traduire en équations les données et obtenir : $a + b = 27$; $b + c = 31$; $c + d = 26$; $d + e = 18$; $a + c + e = 36$. Procéder par substitutions successives, par exemple en extrayant b de la première relation et le substituant dans la deuxième, … et ainsi de suite.

Niveaux : 8

Origine : Riva del Garda, voir problème *Les Bonbons* 11.F.13

15. UNE GRANDE ÉCURIE (II) (Cat. 8)

Arthur travaille dans une écurie où, pour rendre le poil de ses chevaux plus brillant, il ajoute à leurs aliments des carottes, dont ses chevaux sont friands.

Au début de la semaine Arthur a acheté 11 sacs de 100 carottes chacun.

À la fin de cette semaine plus de neuf sacs ont été consommés et Arthur se rend compte que, au cours de la semaine, chaque cheval a mangé autant de carottes qu'il y a de chevaux dans l'écurie et que la somme du nombre de chevaux et du nombre des carottes mangées ne dépasse pas celui des carottes achetées.

Combien pourrait-il y avoir de chevaux dans l'écurie d'Arthur ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les nombres qui, multipliés par eux-mêmes donnent un produit compris entre 900 et 1100 et tels que la somme de ce produit et du nombre de départ soit inférieure à 1100.

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que, puisque chaque cheval a mangé un nombre n de carottes égal à celui des chevaux de l'écurie, le nombre de carottes consommées par tous les chevaux est $n \times n = n^2$.
- Reconnaître que le nombre n^2 des carottes mangées doit être plus grand que 900 (puisque les carottes de neuf sacs ont été mangées) et qu'en les additionnant au nombre n des chevaux on doit obtenir un nombre plus petit ou égal à 1100.
- Procéder par essais successifs à partir d'un nombre de chevaux hypothétique jusqu'à l'obtention d'un nombre de carottes mangées compris entre 900 et 1100 et vérifier que la somme du nombre des chevaux et de celui des carottes mangées est plus petit que 1100.
- Expliciter les essais à partir, par exemple, de 25 chevaux. Éventuellement par un tableau comme celui-ci :

Nombre des chevaux	25	26	27	28	29	30	**31**	**32**	33
Nombre de carottes mangées	625	676	729	784	841	900	**961**	**1024**	1089
Somme des nombres de carottes mangées et de chevaux	650	702	756	812	870	930	**992**	**1056**	1122

- Reconnaître que 30 n'est pas une solution parce que plus de 9 sacs de carottes ont été utilisés mais que, l'écurie pourrait accueillir 31 ou 32 chevaux. En effet $31 + 31^2 = 992$ et $32 + 32^2 = 1056$, résultats tous les deux plus petits que 1100
- Vérifier qu'il ne pourrait pas y avoir plus de chevaux car $33^2 + 33 = 1122$ dépasse le nombre de carottes achetées.

Ou, partir du nombre n^2 de carottes qui est compris entre 900 et 1100. Puisque $30^2 = 900$ ne convient pas, considérer les carrés des nombres successifs qui respectent les limites souhaitées : $31^2 = 961$, $32^2 = 1024$ et $33^2 = 1089$ (les suivants $34^2 = 1122$ ne sont pas acceptables car ils sont plus grands que 1100). Les nombres 31, 32, 33 peuvent être sélectionnés. Contrôler pour chaque carré si la somme demandée est plus petite que 1100. Découvrir que c'est valable pour $31^2 + 31 = 992$ et $32^2 + 32 = 1056$, mais pas pour $33^2 + 33 = 1122$. En déduire qu'il peut y avoir 31 ou 32 chevaux dans l'écurie.

Ou, résoudre le système d'inéquation $900 < n^2 + n < 1100$, où n est un nombre naturel tenant compte que $n^2 > 900$.

Puisque $n^2 + n = n \cdot (n + 1)$ on peut procéder par essais organisés en cherchant un nombre qui, multiplié par son successeur, soit compris entre 900 et 1100. On trouve ainsi les solutions, $n = 31$ et $n = 32$.

Niveaux : 8

Origine : Groupe Algèbre (GTAL)

16. LA TEMPÊTE (II) (Cat. 8)

Le gérant de « Horizon plage » a disposé ses parasols de manière à ce que le nombre de files parallèles à la côte soit égal à celui des files perpendiculaires à la côte. Puis, comme il lui restait des parasols, il en a ajouté 4 sur chaque file parallèle à la côte.

Après une tempête, la mer a recouvert une partie de la plage et le gérant a dû retirer les deux files de parasols les plus proches de la mer et répartir ces parasols sur les files qui restaient. De cette manière, les files parallèles à la côte ont maintenant chacune 16 parasols.

Combien pourrait-il y avoir de parasols à "Horizon Plage" ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les nombres possibles d'objets pouvant être disposés en n files de $n + 4$ ou en $n - 2$ files de 16.

Analyse de la tâche

- Comprendre comment sont disposés initialement les parasols : dans chaque file parallèle à la côte il y en a 4 de plus que dans les files perpendiculaires à la côte, formant un rectangle de dimensions $n - 4$ et n (parasols).
- Noter que, après la tempête, le nombre de parasols reste le même mais qu'ils sont disposés en deux files de moins avec 16 parasols chacune : $16 \times (n - 2)$
- Comprendre que le nombre de parasols est un multiple de 16 et que le nombre des files avant la tempête doit être supérieur à 2 et inférieur à 12 (sinon les parasols dans chaque file auraient déjà été 16 ou plus).
- Procéder par essais du nombre initial de files, en contrôlant que le nombre de parasols à redistribuer après la tempête soit divisible par le nouveau nombre de files et vérifier que le nombre final de parasols par file soit 16. Pour aider les correcteurs voici un tableau possible :

n° initial d files	parasols par file	parasols à redistribuer après la tempête	n° final de files	parasols ajoutés par file	n° final de parasols par file
3	7	14	1	14:1 =14	7 + 14 = 21
4	8	16	2	16 : 2 =8	8 + 8 =**16**
5	9	18	3	18 : 3 = 6	6 + 9 =15
6	10	20	4	20 : 4 = 5	5 + 10 = 15
7	11	22	5	22 : 5 n'est pas divisible	--
8	12	24	6	24 : 6 = 4	4 + 12 = **16**
…	…	…	…	…	...

- Trouver ainsi les deux possibilités : 4 files initiales avec 4 + 4 parasols par file pour un total de **32** parasols, ou 8 files initiales avec 12 parasols par file pour un total de **96** parasols.
- Comprendre qu'il n'y a pas d'autre solution parce qu'en continuant le tableau on obtient des nombres de parasols à redistribuer non divisibles par le nouveau nombre des files ou un nombre de parasols par file qui dépasse 16 et devient de plus en plus grand
- Dans l'analyse des différents cas on peut exclure les nombres impairs qui donnent un nombre impair de parasols et par conséquent non divisible par 16

Ou procéder par essais du nombre initial de files, calculer le nombre de parasols dans la disposition avant la tempête (n files de $n + 4$ parasols chacune) et celui de la disposition après la tempête ($n - 2$ files de 16 parasols chacune) et contrôler que les nombres obtenus soient égaux : par exemple avec 3 files initiales il y a $3 \times (3 + 4) = 21$ parasols (avant la tempête) différent de $1 \times 16 = 16$ (après la tempête), alors qu'avec 4 files initiales il y a $4 \times (4 + 4) = 32$ (parasols (avant la tempête)) égal à $2 \times 16 = 32$ (après la tempête) et ainsi de suite jusqu'à trouver l'autre solution : 96 parasols sur 8 files. Constater qu'il ne peut pas y avoir d'autre solution, éventuellement avec des considérations comme dans le cas précédent.

Cette procédure est plus rapide et permet de calculer aussi le nombre des parasols.

Ou par algèbre :

en notant n le nombre de files de la disposition initiale et donc $(n + 4)$ le nombre initial de parasols par file et $(n - 2)$ le nombre final de files, poser l'équation du second degré $n(n + 4) = 16(n - 2)$. Trouver les deux solutions $n = 4$ et $n = 8$.

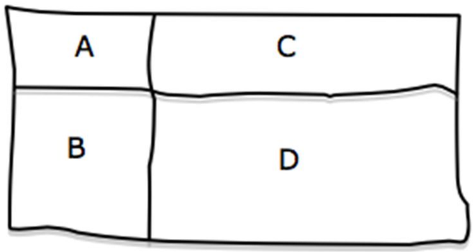
- Calculer ensuite le nombre total de parasols (respectivement **32** et **96**) en multipliant le nombre de files par 16.

Niveaux : 8

Origine : Groupe Algèbre (GTAL**)**

17. LES CINQ RECTANGLES (II) (Cat. 8)

Le professeur demande à ses élèves de construire chacun quatre rectangles A, B, C, D dont les périmètres sont : 10 cm (A), 14 cm (B), 20 cm (C) et 24 cm (D) et de les disposer comme sur cette figure esquissée au tableau noir.



Puis il leur demande de calculer le périmètre et l'aire du grand rectangle qu'ils ont obtenus et de comparer leurs résultats.

Les élèves constatent qu'ils ont tous obtenu le même périmètre de leur grand rectangle mais que les aires de ces rectangles sont différentes

Quel est le périmètre des grands rectangles ?

Quelle est la plus grande aire possible pour le grand rectangle ?

Montrez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Former des rectangles composés chacun de quatre rectangles de périmètres 10, 14, 20 et 24 cm, et déterminer leur périmètre et celui d'aire maximale.

Analyse de la tâche

- Observer la figure et comprendre pourquoi il y a différents rectangles de 10 14, 20 et 24 cm de périmètre (ils peuvent être plus ou moins « allongés », et même carrés.
- Comprendre que si on choisit la longueur d'un côté du rectangle de 10 cm de périmètre, la longueur de l'autre côté est déterminée et peut se calculer par la relation : le périmètre est la somme des quatre longueurs des côtés, deux largeurs et deux longueurs. Par exemple :
  - si l'on choisit 1 cm pour la largeur, la longueur sera 4 cm ($10 = 2 \times 1 + 2 \times 4$)
  - si l'on choisit 1,5 cm pour la largeur, la longueur sera 3,5 cm ($10 = 2 \times 1,5 + 2 \times 3,5$)
- Constater que toutes les autres dimensions des trois autres petits rectangles et du grand sont aussi déterminées par la valeur choisie pour une des dimensions du premier petit rectangle.
- Pour répondre aux deux questions sur le périmètre et l'aire les calculs peuvent par exemple être regroupés sous cette forme ordonnée à partir d'une dimension du premier rectangle, de 10 cm :

p = 10	p = 20	p = 14	p = 24	Dim. grand	p grand	Aire (cm^2)
(1 ; 4)	(1 ; 9)	(3 ; 4)	(3 ; 9)	(13 ; 4)	34	52
(1,5 ; 3.5)	(1,5 ; 8,5)	(3,5 ; 3,5)	(3,5 ; 8,5)	(12 ; 5)	34	60
(2 ; 3)	(2 ; 8)	(4 ; 3)	(4 ; 8)	(11 ; 6)	34	66
(2,5 ; 2,5)	(2,5 ; 7,5)	(4,5 ; 2,5)	(4,5 ; 7,5)	(10 ; 7)	34	70
(**3** ; 2)	(3 ; 7)	(5 ; 2)	(5 ; 7)	(9 ; 8)	34	**72**
(**3,5** ; 1,5)	(3,5 ; 6,5)	(5,5 ; 1,5)	(5,5 ; 6,5)	(8 ; 9)	34	**72**
(4 ; 1)	(4 ; 6)	(6 ; 1)	(6 ; 6)	(7 ; 10)	34	70
(4,5 ; 0,5)	(4,5 ; 5,5)	(6,5 ; 0,5)	(6,5 ; 5,5)	(6 ; 11)	34	66

  et constater la constance du périmètre et l'augmentation puis la diminution « symétriques » de l'aire autour de 72 pour les valeurs de 3 et de 3,5, pour comprendre qu'il est nécessaire d'insérer une nouvelle valeur 3,25 :

p = 10	p = 20	p = 14	p = 24	Dim. grand	p grande	Aire (cm^2)
(**3,25** ; 1,75)	(3,25 ; 6,75)	(5,25 ; 1,75)	(5,25 ; 6,75)	(8,5 ; 8,5)	34	**72,25**

  Constater alors, vu la « symétrie » des variations (augmentations suivies de diminutions correspondantes) que le plus grand rectangle a une aire de 72,25 cm^2.
- On peut aussi arriver à cette conclusion en sachant que, parmi tous les rectangles de 34 cm de périmètre, c'est le carré de 8,5 cm de côté dont l'aire est la plus grande.

Ou : résoudre le problème par la recherche du maximum de la fonction A = x (17 – x) où la variable est le premier côté d'un rectangle de 34 cm de périmètre.

Niveaux : 8

Origine : BB et responsables de l'épreuve II

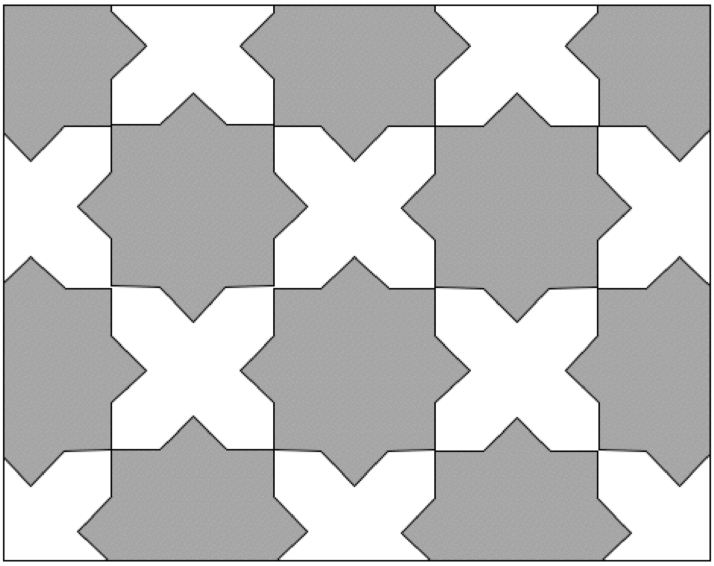
18. UNE MOSAÏQUE DU MAROC (Cat. 8)

L'art islamique est d'une grande richesse en mosaïques qui émerveillent les touristes.

Le dessin qui suit représente un fragment de l'une d'elles, qui recouvre une grande paroi d'une salle de réception d'un palais de Marrakech, constituée de milliers de carreaux gris et de carreaux blancs.

Chaque carreau a 16 côtés, tous de même longueur : 5 cm.

Dans cette figure on peut voir comment sont disposés les carreaux gris et blancs.



Une touriste, en observant la paroi, a estimé que sa surface en blanc est les 3/4 de sa surface en gris.

Son fils lui fait observer qu'un carreau blanc ou un carreaux gris, peut se décomposer en triangles (les « pointes » des carreaux) et rectangles et qu'on peut calculer ce rapport avec certitude ou avec une meilleure approximation que 3/4.

Calculez le rapport entre les aires en blanc et en gris de la paroi.

Justifiez votre réponse avec le détail de la procédure que vous avez suivie.

ANALYSE A PRIORI

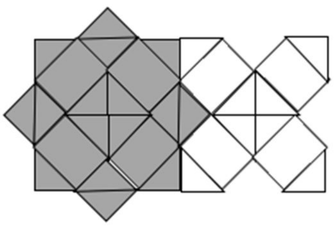
Tâche mathématique

Calculer le rapport des aires de deux types de figures d'une mosaïque, par décompositions en demi-carrés triangulaires et rectangles dont un côté est celui d'un carré et l'autre celui de sa diagonale.

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que, le nombre de carreaux gris et le nombre de carreaux blancs est approximativement le même sur une paroi constituée de milliers de carreaux et qu'il suffit de comparer les aires d'un carreau de chaque sorte.
- Chercher à paver chacun des carreaux par des carrés, rectangles et petits triangles. Les petits triangles se remarquent directement sur l'extérieur des deux polygones ; 4 sur le carreau à "croix" en blanc, 8 sur le carreau gris. Remarquer que les deux branches de la croix se superposent en un carré central laissant un rectangle et un triangle sur chaque bras. On peut aussi imaginer une même structure en croix même dans le carreau gris.

  Par exemple, voici un pavage :

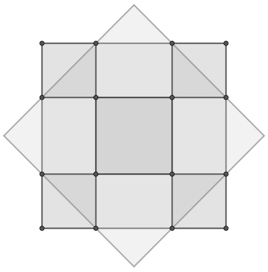
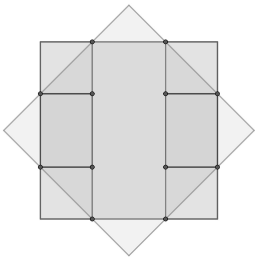
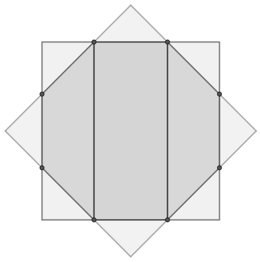


Le carreau gris se décompose en 16 triangles (isocèles rectangles) et 4 rectangles, le carreau blanc en 8 triangles et 4 rectangles. Les aires des triangles sont égales à 12,5 = 25/2 cm^2. Les rectangles ont 5 cm de largeur, leur longueur est celle de l'hypoténuse d'un triangle qui peut se calculer par Pythagore ou comme le côté du carré central : $\sqrt{50}$ cm qu'on peut arrondir à 7,0 ou 7,1. L'aire d'un rectangle est donc $5 \times \sqrt{50} \approx 35 \approx 35{,}5$

- Calculer l'aire des deux carreaux et le rapport :
  L'aire d'un carreau blanc : $8 \times 25/2 + 4 \times (5 \times \sqrt{50}) = 100 + 20 \times \sqrt{50}$ (en cm^2) ou ($100 + 100\sqrt{2} \approx 240 \approx 241$)
  L'aire d'un carreau gris : $16 \times 25/2 + 4 \times (5 \times \sqrt{50}) = 200 + 20 \times \sqrt{50}$ (en cm^2) ou ($200 + 100\sqrt{2} \approx 340 \approx 341$)
  Le rapport des aires en blanc / aires en gris est $(100 + 20\sqrt{50}) / (200 + 20\sqrt{50}) = 1/\sqrt{2} \approx 0{,}7 \approx 0{,}71$
- En cas de mesures (approximatives) directes sur un dessin avec 7 cm pour l'hypoténuse du triangle, le calcul des mesures des aires donne, en cm^2 : carré central $7^2 = 49$, rectangle $7 \times 5 = 35$ dont on tire l'aire d'un carreau gris : $49 + 4 \times 35 + 4 \times 25 + 4 \times 25/2 = 340$ (cm^2), l'aire d'un carreau blanc $49 + 4 \times 35 + 4 \times 25/2 = 240$ (cm^2) et leur rapport est à peu près égal à $240/340 \approx 0{,}7$.

Il y a de nombreuses autres manières de déterminer les aires, par des procédures algébriques ou par d'autres décompositions des figures, en se référant ou non à Pythagore, en utilisant ou non l'écriture $\sqrt{2}$

L'aire d'un carreau gris, par exemple, peut être calculé à partir des subdivisions suivantes:

Niveaux : 8

Origine : Groupe 0^0 (GOAO)