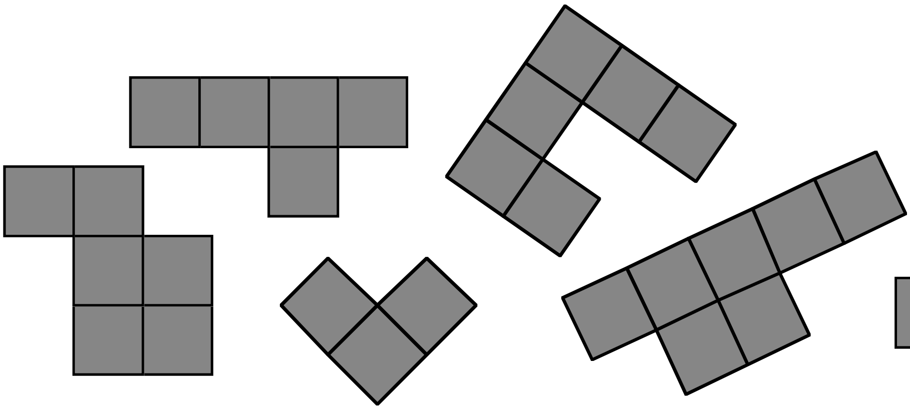
	Titres	*Catégories*						*Origine*	*Domaines*
1	Une pièce en trop	**3**						10.F.01	Recomposition d'un carré
2	Le nez de Pinocchio	**3**	**4**					7.II.04	Suite d'additions et soustractions
3	Une belle course	**3**	**4**	**5**				CB	Relations entre trois nombres add & mult.
4	Le code du coffre	**3**	**4**	**5**				BE	Relations entre les chiffres d'un nombre
5	Les petits trains	**3**	**4**	**5**				GTAL+UD	Pré algèbre, combinaison de trois prix en nombres naturels
6	Jeu de fléchettes		**4**	**5**	**6**			SI	Décomposition de 123 en unités, dizaines et centaines
7	Les boîtes de Catherine		**4**	**5**	**6**			PR	Développement et volume d'une boîte en forme de parallélépipède rectangle
8	Trois, quatre, cinq dinosaures ?			**5**	**6**	**7**		BB	Pré algèbre : prix de 3d + 15 prix de 5d − 1
9	Le vitrail			**5**	**6**	**7**	**8**	LY	Pavage avec des rectangles d'aires données
10	Quadrilatères				**6**	**7**	**8**	BB	Dessin de quadrilatères d'aire 2 sur une grille de 2 x 2
11	Nombres et dés				**6**	**7**	**8**	PR	Disposition optimale des chiffres (0-9) sur les faces de deux cubes
12	A la fromagerie				**6**	**7**	**8**	PU	Recherche de 4^{e} proportionnelle, en présence de trois grandeurs
13	Polygones					**7**	**8**	UD	Recherche de polygones, en fonction de leurs nombres de côtés
14	Une étrange multiplication					**7**	**8**	14.F.15	Multiples, algorithme de la multiplication
15	Un quatrième segment, et beaucoup de triangles						**8**	BB	Géométrie, dénombrement de triangles

1. UNE PIÈCE EN TROP (Cat. 3)

Aurélie a formé un carré avec les cinq pièces de son puzzle.

Malheureusement, son petit frère Théo a défait le puzzle et a ajouté une sixième pièce, venant d'un autre puzzle.

Voici les six pièces :



Reconstituez le puzzle carré d'Aurélie avec les cinq pièces et indiquez la pièce que Théo a ajoutée.

ANALYSE A PRIORI

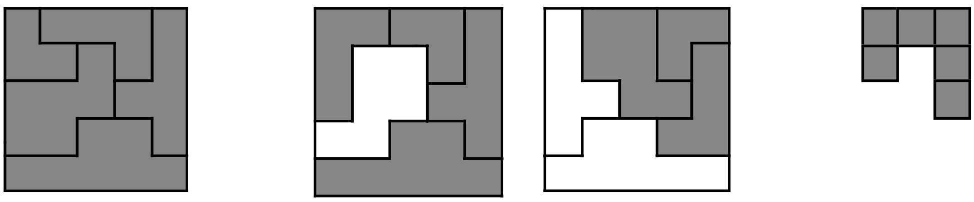
Tâche mathématique

Composer un puzzle carré de 5 pièces à partir de six pièces dont l'une est en trop et identifier celle-ci

Analyse de la tâche

- Faire connaissance avec les pièces, en les découpant, les manipulant ou les reproduisant
- Reconstituer le puzzle par essais successifs.
  Exemples de solutions (on accepte celles où une ou plusieurs pièces sont retournées)

sans retourner de pièces — avec une ou deux pièces retournées — pièce en plus



Ou : déterminer le nombre de carrés des pièces ; constater que le puzzle devra avoir 25 (5 × 5) carrés, que le totale des carrés des six pièces est 31 et qu'il faudra donc écarter l'une des deux pièces de 6 carrés avant de commencer les essais.

Niveaux : 3

Origine : 10.F.01

2. LE NEZ DE PINOCCHIO (Cat. 3, 4)

Le nez de Pinocchio a 5 cm de long.

Quand Pinocchio dit un mensonge, la Fée aux cheveux bleus l'allonge de 3 cm, mais quand il dit la vérité, la Fée le raccourcit de 2 cm.

À la fin de la journée, Pinocchio a dit 7 mensonges et son nez a 20 cm de long.

Combien de fois Pinocchio a-t-il dit la vérité à la Fée au cours de la journée ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver la réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans une suite de transformations additives (additions et soustractions) qui conduisent de 5 à 20 par 7 additions de 3 et quelques soustractions de 2, trouver le nombre de ces dernières.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation et comprendre ce qui se passe quand Pinocchio dit un mensonge (+3 cm) et quand il dit la vérité (-2 cm).
- Se rendre compte que l'ordre dans lequel sont effectuées les opérations, à partir de 5, n'est pas connu ; mais que l'on sait qu'il y aura 7 additions de 3 et qu'il faudra trouver le nombre, encore indéterminé, de soustractions de 2 pour arriver à 20.
- Procéder par essais en partant de la longueur initiale du nez (5 cm) en s'aidant éventuellement d'une représentation graphique : alterner les 7 allongements (+3) avec les diminutions (-2) pour arriver à 20.

Ou : additionner 7 fois le 3 pour arriver à 26 et soustraire 2 jusqu'à 20 (3 fois)

Ou : Trouver de combien s'allonge le nez en 7 mensonges $7 \times 3 = 21$ cm, les ajouter au 5 cm initiaux, pour arriver à 26 cm avec les sept mensonges seulement et constater que, puisque le nez a 20 cm à la fin de la journée il s'est raccourci de 6 cm, ce qui représente 3 vérités ($6 \div 2$ ou $3 \times 2 = 6$)

Niveaux : 3, 4

Origine : 7.II.04

3. UNE BELLE COURSE (Cat. 3, 4, 5)

Dix enfants ont participé à une course. Ils portaient des dossards numérotés de 1 à 10.

En additionnant les numéros écrits sur les dossards des trois premiers arrivés, on obtient 19.

Le numéro écrit sur le dossard de l'enfant arrivé troisième est le double du numéro écrit sur le dossard de l'enfant arrivé deuxième.

Trouvez, tous les numéros qui pourraient être écrits sur le dossard du premier, du deuxième et du troisième arrivés et écrivez-les dans l'ordre d'arrivée.

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver, parmi les nombres de 1 à 10, trois d'entre eux dont la somme est connue (19), le dernier de ces trois nombres étant le double du second, dans un contexte de classement d'une course.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les nombres possibles vont de 1 à 10, qu'il faut en trouver trois dont la somme est 19 et que parmi ces trois nombres, le dernier est le double du deuxième, le premier nombre étant celui du premier arrivé.
- Procéder par essais plus ou moins organisés avec des triplets de nombres, en vérifiant si les conditions du problème sont vérifiées et trouver ainsi les trois « classements » (c'est-à-dire avec ordre interne 1^{e}, 2^{e}, 3^{e}) : (10 ; 3 ; 6), (7 ; 4 ; 8), (4 ; 5 ; 10)

Ou, procéder systématiquement en écrivant toutes les sommes de 3 nombres pris parmi les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 et 10, puis retenir les triplets qui vérifient les deux conditions (somme égale à 19 et un nombre double de l'autre) et trouver ainsi les trois classements

Il y a encore de nombreuses autres manières de trouver les triplets et de mettre leur ordre en évidence.

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Campobasso

4. LE CODE DU COFFRE (Cat. 3, 4, 5)

Pour ouvrir son coffre-fort, Julie a besoin du code qui est un nombre à trois chiffres. Elle ne s'en rappelle plus mais elle est certaine que :

- le code est un nombre entre 500 et 600,
- deux chiffres sont identiques,
- la somme des chiffres est 17.

Quels sont les codes possibles qui permettent d'ouvrir le coffre de Julie ?

Montrez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les nombres naturels compris entre 500 et 600 dont la somme des chiffres est 17 et dont deux chiffres sont identiques.~~.~~

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il peut y avoir plusieurs codes et qu'il faut les donner tous.
- Comprendre que le premier chiffre du code est nécessairement 5.
- Passer au crible tous les nombres compris entre 500 et 600 en ne conservant que ceux qui ont au moins deux chiffres identiques et dont la somme des chiffres fait 17 (ou mieux – car plus rapide et strictement équivalent – dont la somme des deux derniers chiffres fait 12).

Ou : limiter la génération des codes à ceux dont la somme des deux derniers chiffres fait 12, soit 539 – 548 – 557 – 566 – 575 – 584 - 593.

- Ne conserver dans la liste précédente que ceux qui ont deux chiffres identiques.

Ou : Comprendre qu'il faut deux chiffres identiques et essayer d'abord avec le 5. Si on a deux chiffres 5, le troisième est nécessairement 7 pour que la somme fasse 17. On a les codes 557 et 575.

- Chercher un autre chiffre que le 5 en double. Comme il faut que le double de ce chiffre soit égal à 12, il ne peut s'agir que de 6. On a alors le code 566.
- Remarquer que l'on a exploité tous les cas à partir des conditions « être entre 500 et 600 » (donc commencer par 5) et « avoir deux chiffres identiques » (donc 5 ou un autre).

Niveau : 3, 4, 5

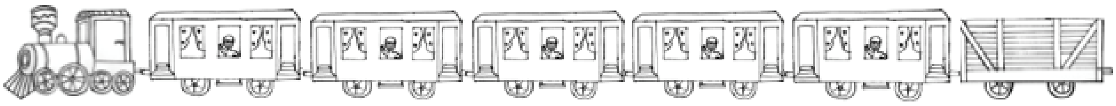
Origine : Belgique

5. LES PETITS TRAINS (Cat 3, 4, 5)

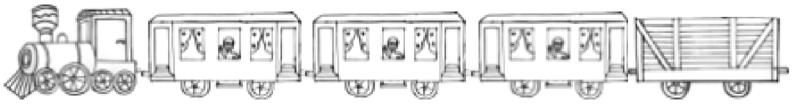
Un magasin de jouets vend des locomotives, des wagons passagers et des wagons marchandises pour construire le train que l'on désire.

Les trois éléments ont des prix différents.

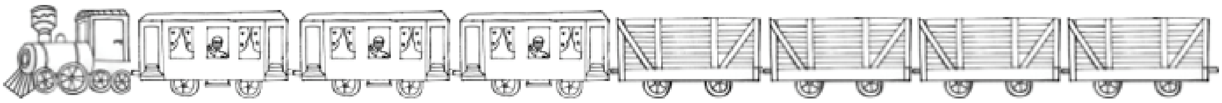
Toutes les locomotives ont le même prix, tous les wagons passagers ont le même prix, tous les wagons marchandises ont le même prix.



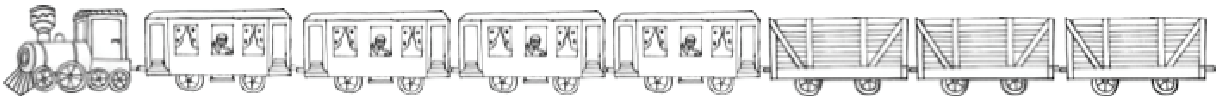
Ce train coûte 35 euros



Ce train coûte 25 euros



Ce train coûte 34 euros



Quel est le prix de ce train ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

À partir de trois compositions différentes de trois objets dont on connaît le prix, trouver le prix d'une quatrième composition de ces trois objets. (L + 5P + M = 35 – L + 3P + M = 25 – L + 3P + 4M = 34 → L + 4P + 3M = ?)

Analyse de la tâche

- Comprendre que les trois éléments qui composent le train ont chacun un coût différent et que les éléments d'un même type ont le même prix.
- Analyser les trois différentes combinaison et relever le nombre de chaque élément de chacun : (Train 1 : 1 locomotive ; 5 wagons de passagers ; 1 de wagon de marchandises - Train 2 : 1 *l*, 3*wp*, 1 *wm* - Train 3 : 1 *l* ; 3 *wp*, 4 *wm* - Train 4 : 1 *l*, 4 *wp*, 3 *wm*.)
- Se rendre compte que pour obtenir le coût du train à acheter il est nécessaire de confronter les nombres de différents éléments dont est composé chaque train.
- Trouver la valeur de chaque élément :
  Pour trouver le coût d'un *wp* : partir de la différence entre le train 1 et le train 2 qui est de 2 *wp* et donc la différence de prix 10 € (35 – 25) est équivalente à celle de ces deux wagons. Le prix d'un *wp* sera alors de 5 €.
  Pour trouver le coût d'un *wm* : partir de la différence entre le train 2 et le train 3 qui est de 3 *wm* et donc la différence de prix 9 € (34 – 25) est équivalente à celle de ces trois wagons. Le prix d'un *wm* sera alors de 3 €.

Pour trouver le coût d'une locomotive : on peut partir de n'importe quel train dont on connaît le prix en calculant le coût des *wp* et des *wm* et en le soustrayant du coût total : (train 1 : 35 - (5 × 5 + 3) = 7; train 2 : 25 - (5 × 3 + 3) = 7; train 3 : 40 - (3 × 5 + 6 × 3) = 7

- Calculer la valeur du dernier train : 7 (*l*) , 5 (*wp*) , 3 (*wm*) : 7 + (4 × 5) + (3 × 3) = 36 (en €).

Ou : Procéder par essais plus ou moins organisés, en choisissant par exemple une valeur pour un des éléments et vérifiant à chaque fois si la valeur hypothétique correspond aux prix connus.

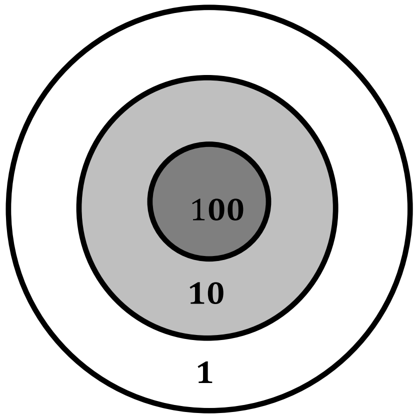
Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Groupe Algèbre + Udine (reprise de *Pièces magnétiques*, 24,I,13)

6. JEU DE FLÉCHETTES (Cat. 4, 5, 6)

Tom joue aux fléchettes.

Il a 25 fléchettes et une cible comme celle-ci :



Lorsqu'il tire une fléchette Tom obtient :

- 100 points s'il touche la zone « 100 »,
- 10 points s'il touche la zone « 10 »,
- 1 point s'il touche la zone « 1 »,
- 0 point s'il manque la cible.

Après avoir tiré toutes ses fléchettes, Tom a obtenu 123 points.

Combien de fléchettes peuvent avoir touché la cible, et dans quelles zones ?

Indiquez toutes les possibilités et, pour chacune d'elles, dites quel est le nombre de fléchettes dans la cible et dans chaque zone).

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver tous les nombres possibles de termes 1, 10 et 100 (au maximum 25) dont la somme est 123.

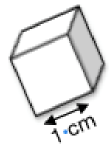
Analyse de la tâche

- Comprendre comment est constituée la cible : la zone extérieure vaut un point, la zone intermédiaire 10 points et la centrale 100 points et l'extérieur vaut 0 point.
- Comprendre que toutes les fléchettes lancées permettent à Tom d'accumuler des points jusqu'à arriver à 123 et qu'il n'y en a pas nécessairement 25 dans la cible (les autres peuvent être en dehors de la cible).
- Se rendre compte que dans la zone centrale on ne peut trouver au maximum qu'une fléchette (sinon, le score serait égal ou supérieur à 200), dans la zone intermédiaire au maximum 12 fléchettes (sinon, le score serait égal ou supérieur à 130), dans la zone externe au maximum 23 fléchettes (sinon, s'il y en avait 24 il ne serait pas possible d'obtenir avec la fléchette restante le score de 123, ce qui ne serait pas le cas non plus si les 25 fléchettes étaient dans cette zone).
- Procéder par essais erreurs, organisés si possible, et décomposer le nombre 123 en une somme de centaines, dizaines et unités, en gardant à l'esprit qu'une centaine correspond à une fléchette dans la zone centrale, une dizaine à une fléchette dans la zone intermédiaire et une unité à une fléchette dans la zone extérieure.
- Penser à contrôler le nombre de fléchettes pour chaque décomposition trouvée :
  - 6 fléchettes : **1** × 100 + **2** × 10 + **3** × 1 = 123
  - 15 fléchettes : **1** × 100 + **1** × 10 + **13** ×1 = 123 ou **12** × 10 + **13** × 1 = 123
  - 24 fléchettes : **1** × 100 + **23** × 1 = 123 ou **11** × 10 + **13** × 1 = 123

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Siena

7. LES BOÎTES DE CATHERINE (Cat. 4, 5, 6)



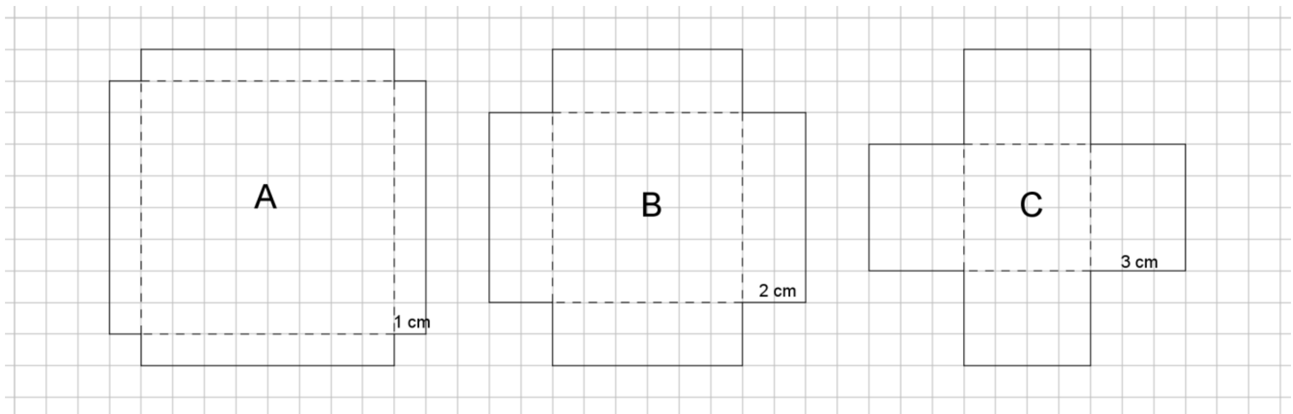
Catherine a 70 cubes dont toutes les faces ont 1 cm de côté

Elle désire construire une boîte sans couvercle qui pourra les contenir tous.

Elle prend trois feuilles cartonnées carrées, dont les côtés mesurent 10 cm.

Dans chacune de ces feuilles, elle découpe un petit carré de chaque angle : dans la feuille A le côté de chaque petit carré mesure 1 cm, dans la feuille B il mesure 2 cm et dans la feuille C il mesure 3 cm.

Voici les trois feuilles cartonnées avec les petits carrés découpés.



Catherine plie chaque feuille selon les lignes en pointillés et construit les trois boîtes sans couvercle en collant les faces avec du papier adhésif.

Quelle boîte pourra contenir tous les cubes de Catherine, sans que ceux-ci ne dépassent de la boîte ?

Montrez comment vous avez trouvé la boîte demandée et pourquoi Catherine ne peut choisir que cette boîte.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

A partir de trois développements partiels de boîtes à base carrée (sans couvercle), imaginer les solides correspondant et déterminer si on peut y placer 70 cubes de 1 cm d'arête.

Analyse de la tâche

- Observer les figures et se rendre compte qu'elles montrent les trois cartons carrés après le découpage des petits carrés dans les angles de longueurs de côtés (1 cm, 2 cm, 3 cm) c'est-à-dire les développements de trois boîtes de dimensions différentes
- Se rendre compte que, en pliant les cartons selon les lignes pointillées et en faisant se rejoindre les faces latérales, on obtient des parallélépipèdes rectangles de hauteurs différentes dont les bases sont des carrés de mesures aussi différentes.
- Comprendre que la hauteur de chaque boîte est égale au côté des petits carrés découpés dans les angles et que sur chaque niveau (couche) on pourra disposer au maximum le même nombre de cubes que sur la base.
- Comprendre que pour pouvoir remplir les boîtes avec le maximum de cubes, il faut les disposer l'un contre l'autre afin de ne pas laisser d'espaces vides entre eux.
- Se rendre compte que, en comptant les carreaux, que les bases des boîtes ont des aires respectives de 64, 36 et 16 carrés et que chaque cube a ses faces égales à ces carrés.
- Puisque a hauteur de la boîte A est égale à l'arête d'un cube, on la remplira avec une seule couche de 64 cubes (8×8), alors que la boîte B peut contenir 72 cubes au maximum ($36 + 36$ ou 36×2), boîte C peut contenir trois couches de cubes, donc 48 ($16 + 16 + 16$ ou 16×3).
- Conclure que l'unique boîte qui peut contenir les 70 cubes est la boîte B

Ou : découper les figures et construire les boîtes en utilisant du papier adhésif pour rejoindre les faces latérales ; si des cubes de 1 cm d'arête sont à disposition, remplir les boîtes et compter les cubes.

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Parma

8. TROIS, QUATRE OU CINQ DINOSAURES ? (Cat. 5, 6, 7)

Avec son argent, Tom veut s'acheter des modèles de dinosaures.

Dans le magasin de jouets, ces modèles sont tous au même prix.

Tom constate que :

- s'il achète trois dinosaures, il lui restera 15 €.
- mais pour acheter cinq dinosaures, il lui manque 11 €.

Tom a-t-il assez d'argent pour acheter quatre dinosaures ?

Si oui, combien d'argent lui restera-t-il ?

Si non, combien d'argent lui manquera-t-il ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le prix de 4 objets identiques sachant que le prix de 3 objets augmenté de 15 € est égal au prix de 5 objets diminué de 11 €.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le prix de trois dinosaures augmenté de 15 € est égal au prix de cinq dinosaures diminué de 11 € et que cette somme est égale à l'avoir de Tom.
- Comprendre qu'il faut trouver le prix de quatre dinosaures et la somme d'argent possédée par Tom et comparer ces 2 valeurs.
- Procéder par essais et ajustements pour déterminer le prix d'un dinosaure, en respectant les contraintes de l'énoncé. Ayant déterminé ce prix (13 €) :
  soit chercher le prix de quatre dinosaures (52 €) et l'avoir de Tom (3×13 € + 15 € = 54 € ou 5×13 € - 11 e = 54 €) et conclure qu'il peut acheter les quatre dinosaures, car ils coûtent 52 € et que Tom dispose de 54 € ;
  soit remarquer qu'avec les 15 € qui lui restent après achat de trois dinosaures, il peut encore en acheter un et qu'il lui reste encore 2 €.

Ou procéder par déductions :

La différence de prix entre trois dinosaures et cinq dinosaures est égale à 26 € (15 + 11). Elle correspond donc au prix de deux dinosaures, ce qui permet de trouver le prix d'un dinosaure (13 €). Terminer en utilisant l'un des deux raisonnements qui précèdent.

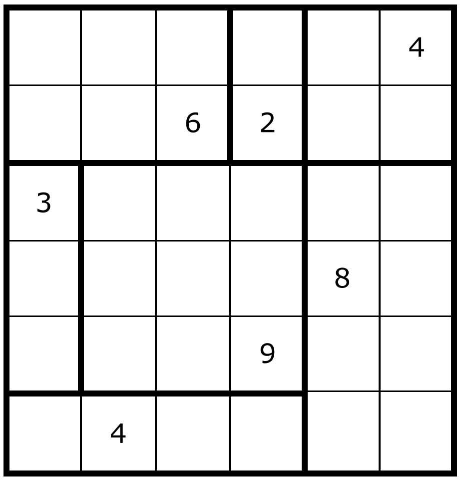
Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Bourg-en-Bresse

9. LE VITRAIL (Cat. 5, 6, 7, 8)

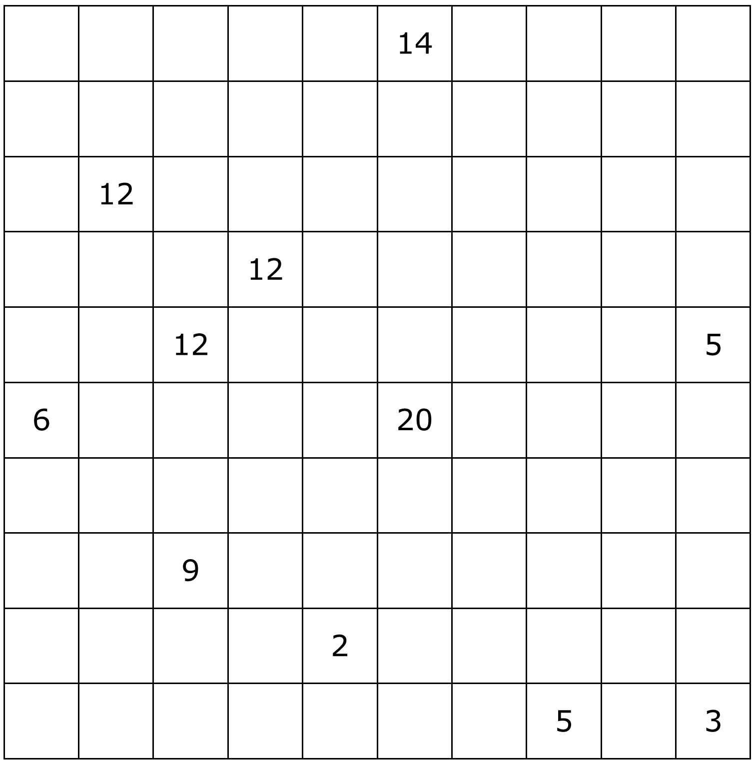
Claire réalise des vitraux composés de rectangles (les carrés sont aussi des rectangles).

Voici le plan de sa dernière construction :



Le nombre écrit dans chaque rectangle est le nombre de carreaux dont il est formé.

Claire veut réaliser un autre vitrail composé de 11 rectangles : un de 20 carreaux, un de 14 carreaux, trois de 12 carreaux, un de 9 carreaux, un de 6 carreaux, deux de 5 carreaux, un de 3 carreaux et un de 2 carreaux, selon le projet ci-dessous :



(Les nombres de carreaux dont sont formés les rectangles sont déjà écrits à l'intérieur de chacun d'eux.)

Dessinez sur ce projet les rectangles que Claire aura sur son vitrail.

(Si vous ne les trouvez pas tous dessinez au moins ceux que vous avez trouvés)

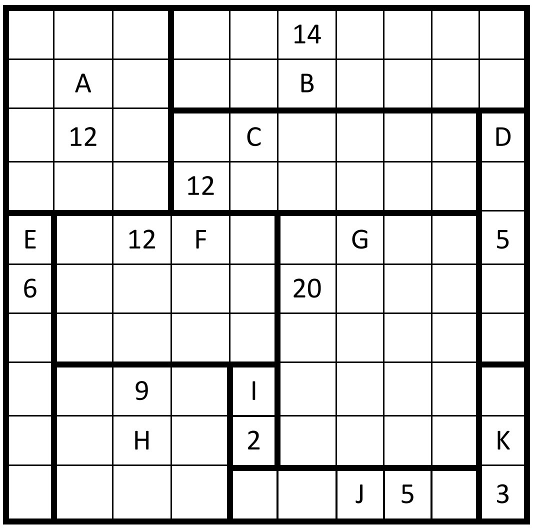
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans une grille à cases carrées, tracer des rectangles permettant de la paver en connaissant pour chacun d'eux leur aire (avec une case de la grille comme unité d'aire) et l'emplacement d'une case qu'il couvre.

Analyse de la tâche

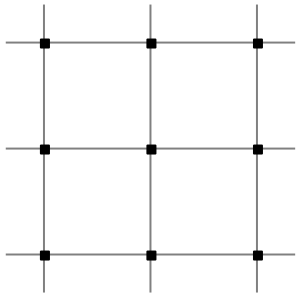
- Comprendre à l'aide du plan du premier vitrail réalisé par Claire (illustration en début d'énoncé) que chaque nombre représente l'aire en nombre de cases de chaque rectangle et est écrit dans une case de celui-ci ;
- Procéder par déductions successives, en commençant par les rectangles pour lesquels une seule solution est possible, par exemple F et K sur la solution ci-dessous :



Niveau : 5, 6, 7, 8

Origine : Lyon

10. QUADRILATÈRES (Cat. 6, 7, 8)



Juliane désire construire, sur cette grille composée de quatre carrés, le plus grand nombre de quadrilatères qui respectent les conditions suivantes :

– leurs quatre sommets doivent être sur des nœuds de la grille,
- leur aire doit être égale à celle de 2 carrés de la grille,
- ils doivent être tous différents (on ne peut pas les superposer exactement en les déplaçant ou en les retournant).

Combien de quadrilatères différents Juliane pourra-t-elle trouver ?

Dessinez-les tous.

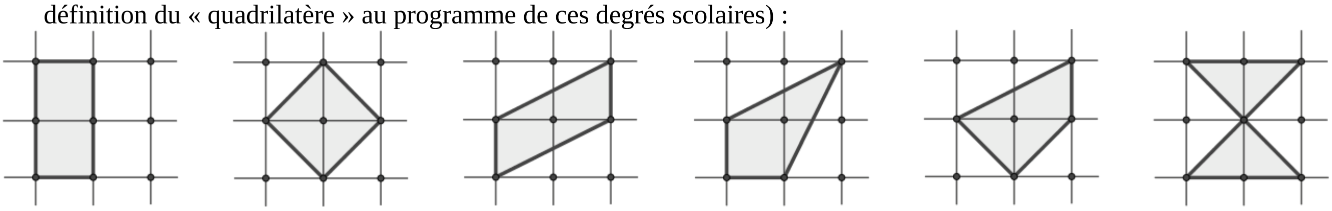
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Sur un quadrillage à maille carrée (2 × 2), dessiner tous les quadrilatères qui ont pour sommets des nœuds du quadrillage et dont l'aire est 2 (en carreaux du quadrillage).

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes du problème : aire 2 et sommets sur les nœuds du quadrillage
- Chercher les quadrilatères : le rectangle apparaît automatiquement, puis le carré et le parallélogramme non rectangle et, enfin, ceux qui sont moins familiers. On peut s'occuper soit de l'aire du quadrilatère, soit de l'aire de la grille non recouverte par le quadrilatère, qui valent toutes les deux 2 (carrés).
- Vérifier qu'il n'y ait pas plusieurs quadrilatères isométriques (ou superposables par une rotation, translation ou « retournement » / symétrie axiale)
- Dessiner les quadrilatères, sur la même grille avec des couleurs différentes ou sur plusieurs grilles.
  Les cinq solutions attendues (avec une sixième, le quadrilatère croisé, qui pourrait apparaître éventuellement selon la définition du « quadrilatère » au programme de ces degrés scolaires) :



Catégories : 6, 7, 8

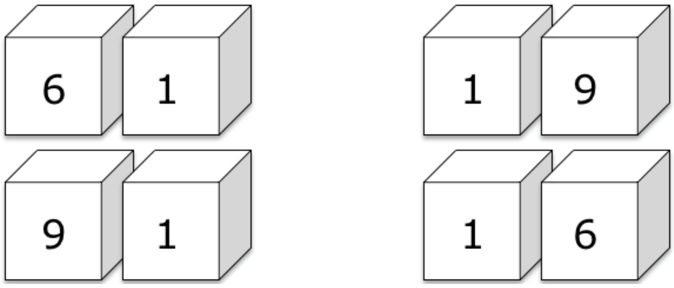
Origine : Bourg-en-Bresse

11. NOMBRES ET DÉS (Cat. 6, 7, 8)

André a fabriqué deux dés en forme de cubes.

Il veut écrire sur chaque face un des dix chiffres, de telle sorte qu'en disposant les deux dés l'un à côté de l'autre, on puisse former des nombres entiers à deux chiffres.

Par exemple, en plaçant les dés de manière que sur l'un d'eux soit visible le chiffre 1 et sur l'autre le chiffre 6, selon les positions des deux dés, on peut lire les nombres : 16, 61, 19 ou 91.



André veut former tous les nombres à partir de 10 (10, 11, 12, 13, ...) sans en sauter un seul. Il se demande quel chiffre écrire sur chaque face pour pouvoir former la plus grande suite de nombres successifs.

Quels sont les chiffres qu'il faut écrire sur les faces d'un des deux dés ?

et quels sont ceux qu'il faut écrire sur les faces de l'autre dé ?

Écrivez le plus grand nombre de la suite qu'André pourra former.

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Écrire 12 chiffres, de 0 à 9, sur les faces de deux dés cubiques de manière qu'en les disposant judicieusement, on puisse présenter la suite des nombres entiers à partir de 10 sans interruption et en obtenir le plus grand nombre possible.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'on dispose de 12 faces, 6 par dé sur lesquelles on doit écrire dix chiffres, on devra donc nécessairement ne choisir que quelques chiffres pour chaque dé.
- Observer sur l'exemple que le 6 tête-bêche se lit 9 et donc si sur un dé on écrit par exemple le chiffre 6, il est inutile d'écrire le chiffre 9.
- Comprendre que, en utilisant deux dés, il y a plus de faces (douze) que de chiffres à écrire (neuf) : 0 ; 1 ; 2; 3 ; 4 ; 5 ; 6/9 ; 7 ; 8, donc trois chiffres devront figurer sur les deux les dés.
- Se rendre compte que, pour écrire les nombres qui ont le même chiffre comme unité et comme dizaine, il faut que ce chiffre soit écrit sur les deux les dés. Il y en a trois qui sont les seuls chiffres qui peuvent être répétés. Pour que la suite des entiers ne soit pas interrompue, il faut que ce soient nécessairement 1, 2 et 3 pour pouvoir former les nombres 11, 22 et 33. La suite des entiers se terminera par le nombre 43, il ne sera pas possible de former le nombre 44.
- Comprendre que pour combiner tous les nombres entiers successifs à partir de 10, les chiffres 0 et 4 doivent être écrits sur deux dés différents pour pouvoir former le nombre 40, alors que 5, 6/9, 7, 8 peuvent être écrits sur l'un ou l'autre dé indifféremment.
- Conclure qu'il faut écrire les chiffres 0, 1, 2, 3 sur un dé et 1, 2, 3, 4 sur l'autre, puis écrire sur les quatre autres faces les chiffres 5, 6/9, 7, 8, indifféremment.

Ou, procéder par essais en écrivant sur les faces de deux cubes ou de leur développement ou encore l'aide d'un tableau les différents nombres qu'on peut obtenir à partir de 10, pour arriver à la conclusion ci-dessus.

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Parma, (Inspiré de *Le calendrier* 12-I-15)

12. À LA FROMAGERIE (Cat. 6, 7, 8)

En se promenant dans les rues de la capitale de Transalpie, un groupe de touristes entre dans une fromagerie et achète une pièce de fromage pour 30 euros.

Ils trouvent le prix très élevé, mais la vendeuse leur explique que pour obtenir un kg de fromage de ce type il faut 10 litres de lait et que pour cette pièce il a fallu 12,5 litres de lait.

Quel est le prix de un kg de fromage de ce type ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le coût d'un kg de fromage connaissant : le coût d'une pièce de ce fromage (30 €) ; le rapport entre 1 kg fromage et le lait nécessaire à sa fabrication (10 l) et la quantité de lait utilisée pour la pièce de fromage (12,5 l)

Analyse de la tâche

- Distinguer les trois grandeurs en jeu (masse de fromage, volume de lait et prix).
- Raisonner, plus ou moins consciemment, sur les rapports constants entre ces grandeurs, par exemple :
  - Calculer le rapport constant entre la masse du fromage et la quantité de lait (10/12,5 = 4/5 ou 0,8) et procéder directement par le calcul du coût de 1 kg de fromage (30 ÷ 5 × 4 = 24 euros) ou, de même, 12,5 ÷ 10 = 1,25 et 30 ÷ 1,25 = 24.
  - Ou diviser 30 par 12,5 pour obtenir le prix pour 1 litre de lait et multiplier par 10 le prix de 10 litres : 24 euros.
  - Ou comprendre que le rapport entre les deux données 10 et 12,5 des volumes de lait est 5/4 donc la dépense de 30 euro est la somme du prix de 1 kg et de ¼ de kg de fromage, c'est à dire 24 euro et 6 euro.
  - Ou, à partir de l'équivalence 1 kg = 1000 g, observer mentalement que : si 10 litres de lait donnent 1000 g de fromage, 12,5 litres donnent 1250 g de fromage. Puis, comme le partage en 5 parties de 1250 = 4 × 250 + 250 (en grammes) se reporte sur le partage en 5 parties de 30 euro ; le prix de 250 g de fromage est 6 euro et le prix d'un kilo est 24 euro.

Ou procéder par essais : donner un prix hypothétique à un kilo de fromage, le multiplier par le poids du fromage de 1,25 kg (obtenu par exemple avec la division 12,5 ÷ 10) et vérifier si on obtient 30 euros ; modifier le prix hypothétique jusqu'à atteindre 24 euros.

Ou (au niveau d'expert, à partir de cat. 7) expliciter l'écriture des proportions :

Par exemple écrire la proportion 10 ÷ 1000 = 12,5 ÷ x , où *x* est la masse du fromage acheté, en grammes, pour obtenir x = 1250 g (ou 1,25 kg). Puis par une seconde proportion (1000 ÷ 1250 = y ÷ 30, où *y* est le prix du fromage par kg, pour obtenir; *y* = 24 euro euros).

Niveau : 6, 7, 8

Origine : Puglia

13. POLYGONES (Cat. 7, 8)

Le professeur Hypoténuse a demandé à chacun de ses 24 élèves de dessiner et découper trois polygones choisis parmi des triangles, quadrilatères, pentagones et hexagones.

Le professeur recueille et observe toutes les figures et note que :

- il y a en tout 300 côtés,
- il y a autant d'hexagones que de quadrilatères,
- pour chaque pentagone il y a 5 triangles.

Combien y a-t-il de triangles, de quadrilatères, de pentagones et d'hexagones ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver, dans un ensemble de 72 triangles, quadrilatères, pentagones et hexagones présentant 300 côtés en tout, le nombre de chacun de ces polygones sachant qu'il y a autant de quadrilatères que d'hexagones, que le nombre des triangles est le quintuple de celui des pentagones

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'on est en présence de 72 polygones (24·3) dont on fait l'inventaire des côtés (300) et des relations entre les nombres des triangles, quadrilatères, pentagones et hexagones et que la demande est de déterminer chacun de ces nombres
- Procéder par essais organisés en vérifiant les contraintes. Par exemple : s'il y avait 1 pentagone, il y aurait 5 triangles, et 33 quadrilatères et hexagones $(72 - 6) \div 2 = 33$; ce qui donnerait 350 côtés : $1 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 33 \cdot 6 + 33 \cdot 4 = 350$, ce qui ne correspond pas aux données, ...
- Poursuivre en augmentant le nombres des pentagones pour trouver la solution : 6 pentagones, 30 triangles, 18 quadrilatères et hexagones, $(72 - 36) \div 2 = 18$, et le nombre des côtés : $6 \cdot 5 + 30 \cdot 3 + 18 \cdot 6 + 18 \cdot 4 = 300$
  Le même genre de procédure est évidemment possible en organisant les essais à partir du nombre des autres polygones que les pentagones ou en tenant compte du nombre total de côtés (300) pour vérifier que le nombre de polygones est bien 72.

Ou : Observer que dans un groupe de 1 pentagone et 5 triangles il y a 20 côtés et que dans un groupe de 1 quadrilatère et 1 hexagone il y a 10 côtés, ce qui fait 30 côtés en tout. S'il y avait 10 groupes d'un type et 10 groupes de l'autre on aurait bien 300 côtés mais 80 figures. Constater alors qu'avec 9 groupes du premier type, on aurait 20 côtés de moins qui devraient être récupérés par deux groupes du second type ; on aurait alors 12 quadrilatères et 12 hexagones, avec un nombre total de 78 polygones : $9 + 45 + 12 + 12 = 78$. Essayer encore avec 8, 7 et 6 et vérifier que dans ce cas il y aurait 72 figures et 300 côtés.

Ou : Poser un systèmes d'équation, par exemple avec a : nombre de pentagones et b : nombre d'hexagones et quadrilatères

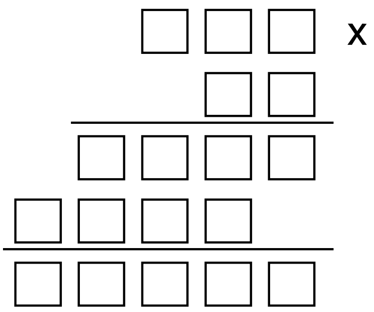
$$\begin{cases} 5a + 5 \times 3a + 6b + 4b = 300 \rightarrow 20a + 10b = 300 \rightarrow 2a + b = 30 \\ a + 5a + b + b = 72 \rightarrow 6a + 2b = 72 \rightarrow 3a + b = 36 \end{cases}$$

dont la solution a = 6 et b = 18 , c'est à dire 30 triangles, 18 quadrilatères, 6 pentagones et 18 hexagones

Niveaux : 7, 8

Origine : Udine

14. UNE ÉTRANGE MULTIPLICATION (Cat. 7, 8)



Dany a reçu de sa cousine une drôle de devinette !

Il s’agit de reconstruire la multiplication « mystérieuse » de cette figure en sachant que les seuls chiffres qu’il peut écrire dans les cases sont 2, 3, 5 et 7.

Dany trouve cette devinette trop difficile, mais sa cousine l’encourage et lui dit qu’il n’y a qu’une manière de disposer les chiffres.

Reconstruisez la multiplication.

Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Reconstituer une multiplication d’un facteur de trois chiffres par un facteur de deux chiffres selon une disposition en colonnes « vide », en sachant que seuls les chiffres 2, 3, 5 et 7 ont été utilisés.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu’il faudra procéder par essais, en commençant par les chiffres des unités des deux facteurs.
- Vérifier d'abord que seuls cinq couples de chiffres des unités sont possibles (3 ; 5), (5 ; 3) (5 ; 5), (5 ; 7), (7 ; 5). Les autres couples conduisent en effet à un chiffre des unités dans le premier produit qui n'est pas sur la liste autorisée, comme : 7 × 3 = 21 donnerait 1 au chiffre des unités.
- Choisir un couple (3 ; 5) par exemple, et continuer par la recherche du chiffre des dizaines du premier facteur. Dans cet exemple, il y a une retenue de 1 et le produit de 5 par chacun des autres chiffres autorisés, plus la retenue de 1, donne 6 ou 1 et ne convient donc pas ! (fig. 1)
- Essayer ensuite (5 ; 3). Le chiffre des dizaines du premier facteur ne peut être que 7 selon le raisonnement précédent et qui conduit à 2 comme chiffre des dizaines du premier produit partiel. (fig. 2)
  Le chiffre des centaines du premier facteur est aussi 7, ce qui donne 2 et 3 pour les deux premiers chiffres du premier produit partiel. (fig. 3).
- Pour les mêmes raisons, le chiffre des dizaines du deuxième facteur ne peut être que 3. (fig. 4)
- Vérifier enfin que le résultat ne contient que les chiffres 2 ; 3 ; 5 ou 7, ce qui donne la solution. (fig. 5)

… … **3**	… **7** 5	**7** 7 5	7 7 5	7 7 5
x … **5**	x … 3	x … 3	x **3** 3	x 3 3
… … 1/6 5	… … **2** 5	**2 3** 2 5	2 3 2 5	2 3 2 5
… … … …	… … … …	… … … …	**2 3 2 5**	2 3 2 5
… … … … 5	… … … … 5	… … … … 5	… … … … …	**2 5 5 7 5**
fig. 1	fig. 2	fig. 3	fig. 4	fig. 5

Comme l’énoncé dit qu’il n’y a qu’une solution, il n’est plus nécessaire de vérifier les couples (5 ; 7), (7 ; 5) e (5 ; 5) de la liste initiale. Mais si on essaye l’un de ces trois couples avant (5 ; 3), on aboutit dans chaque cas à une impasse : rapidement avec (7 ; 5) en raison du reste de 3 qui ferait apparaître un 8 dans les dizaines du premier quotient partiel, un peu plus loin pour le cas du couple (5 ; 7); lors de l’addition finale pour le couple (5 ; 5) car les produits partiels peuvent être 5 × 555 = 2775 mais le produit final contient deux chiffres non autorisés : 55 × 555 = 30525.

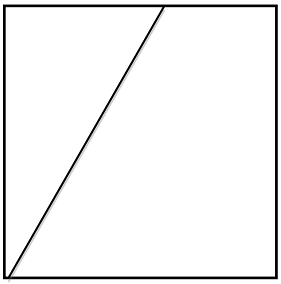
Niveaux : 7, 8

Origine : 14.F.15

15. UN QUATRIÈME SEGMENT, ET BEAUCOUP DE TRIANGLES (Cat. 8)

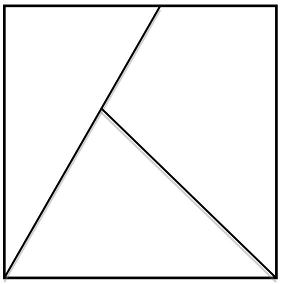
On a tracé 1 segment dans le carré de droite, ce qui le divise en 2 régions, dont l'une est un triangle.

figure de départ :



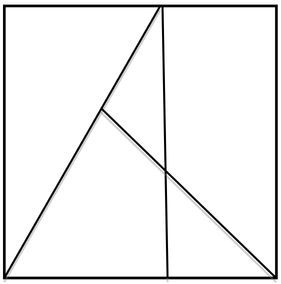
Jean a ajouté un deuxième segment à la figure de départ, suivant une diagonale du carré. Sa figure est composée de 3 régions, dont 2 sont des triangles.

figure de Jean :

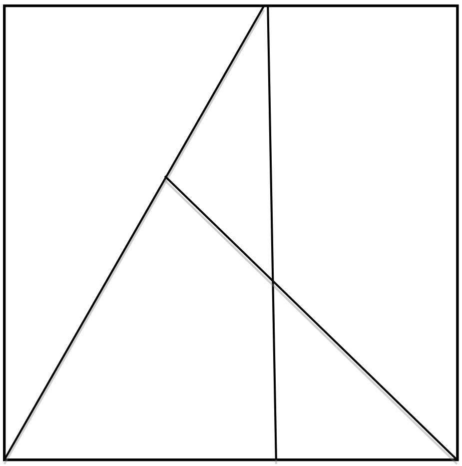


Anne a ajouté un troisième segment, vertical, à la figure de Jean. Le carré est partagé en 5 régions. On peut y distinguer en tout 5 triangles, dont certains sont composés de deux régions.

figure d'Anne :



Ajoutez un quatrième segment dans la figure d'Anne afin de pouvoir y distinguer le plus grand nombre possible de triangles.



Combien de triangles au maximum avez-vous pu former ?

Désignez clairement ces triangles.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Chercher le plus grand nombre de triangles qu'il est possible de faire apparaître sur une figure en ne traçant qu'un seul segment de plus et trouver une méthode pour les désigner.

Analyse de la tâche

- Identifiez les triangles des trois premières figures pour comprendre que certains triangles se recouvrent partiellement. La détermination des triangles est élémentaire pour les deux premières figures. Elle est plus délicate pour les 5 triangles de la figure d’Anne : 3 « élémentaires » et 2 composés de 2 régions.
- Trouver quelques principes d’action permettant d’optimiser le nombre de triangles pour le 4e segment : couper tous les autres, placer son extrémité sur des intersections déjà existantes …
- Trouver une méthode fiable pour dénombrer et désigner les triangles.
- L’usage de couleurs ou de lettres est très difficile à gérer vu le nombre de triangles partiellement superposés. Une des méthodes les plus efficaces, qui exige cependant une très grande rigueur, est de désigner les régions du partage et de dresser l’inventaire des triangles formés d’une région, de deux régions, de trois régions, etc.
- Il est aussi envisageable de nommer les points d’intersection des segments de la figure par des lettres et de désigner les triangles par leurs trois sommets.
- On donne ici un exemple par désignation des régions de la figure d’Anne et trois exemples avec des dispositions différentes du quatrième segment :

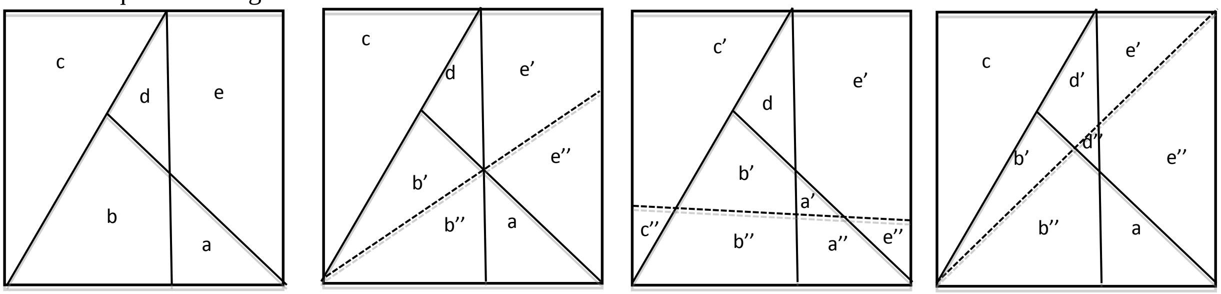


figure d’Anne exemple1 exemple 2 exemple 3

Exemple 1 : le segment partage les régions b et e en b’, b’’, e’, e’’. On y distingue **11 triangles**, dont 6 élémentaires : a, b’, b’’, c, d, e’’ ; 2 composés de deux régions : ab’’, b’d et 3 composés de trois régions ab’’b’, ab’’e’’, b’’b’d.

Exemple 2 : le segment partage les régions a, b et c. On y distingue **10 triangles**, dont 4 élémentaires : a’, c’’, d, e’’ ; 4 composés de deux régions : a’a’’ (a), a’b’, c’c’’ (c), b’d ; 1 composé de trois régions b’’b’d ; 1 composé de quatre régions : a’a’’b’b’’.

Exemple 3 : le segment, diagonale du carré, partage les régions b, d et e. On y distingue **15 triangles**, dont 5 élémentaires : a, b’, c, d’’, e’ ; 5 composés de deux régions : ab’’, b’’d’’, b’d’, d’d’’, d’’e’’ ; 2 composés de trois régions : ab’’b’, b’d’e’ ; 3 composés de quatre régions : ab’’d’’e’’, b’cd’e’, b’’b’d’’d’.

Il existe d’autres dispositions du 4e segment faisant apparaître de 6 à 14 triangles.

Niveau : 8

Origine : Bourg-en-Bresse