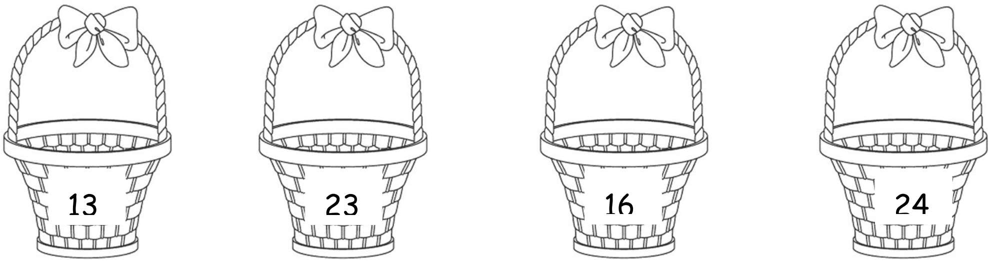
Titre		Catégorie	Origine	Domaines
1	Des pommes pour tous	3 4	BB	Opérations arithmétiques avec des entiers naturels Égalisation de quantités
2	Le petit Poucet et ses frères	3 4	06.I.01	Logique. Analyse de possibilités
3	Des pailles en carrés	3 4	SI	Géométrie plane : carré
4	Échange de billes	3 4 5	LU	Opérations arithmétiques avec des entiers naturels Addition et soustraction
5	Photos de footballeurs	3 4 5	SI	Logique. Relations arithmétiques
6	Les deux poissons	4 5 6	SI	Grandeurs et mesures : aire sur quadrillage
7	Mettre la table	5 6	06.I.08	Opérations arithmétiques avec des entiers naturels Addition et soustraction
8	Les DVD de LUC	5 6	UD	Combinatoire : permutations
9	Alice et les maisons du Pays des Merveilles	5 6 7	UD	Arithmétique. Puissances d'un nombre
10	La face cachée du cube	5 6 7	FC	Géométrie 3D : représentation en perspective
11	Une étrange croix	6 7 8	MI	Géométrie plane, Grandeurs et mesures Carré sur quadrillage et aire
12	Les rues de Transalpina	6 7 8	SI	Numération : succession d'entiers naturels
13	L'antenne relais	7 8	FC	Géométrie plane : lieu de points
14	Des bonds de kangourou	7 8	SI	Parcours : opérations sur les entiers naturels
15	Comme c'est bon les fruits !	7 8	RV	Gestion de données : addition et soustraction d'entiers naturels
16	La 60^e décimale	8	SR	Division euclidienne : écriture décimale périodique
17	La course des monstres	8	LY	Proportionnalité, Grandeurs et mesures

1. DES POMMES POUR TOUS (Cat. 3, 4)

Alex, Bill, Celia et Dora ont cueilli des pommes. Voici leurs paniers avec le nombre de pommes que chacun a cueillies.



Alex Bill Célia Dora

Les quatre amis décident de s'organiser pour que chaque enfant ait le même nombre de pommes. Pour y parvenir, ils décident que :

- Bill donnera des pommes à un seul des enfants qui en ont le moins ;
- Dora en donnera à la fois à Célia et à Alex.

A quel enfant Bill donnera-t-il des pommes et combien ?

Combien de pommes Dora donnera-t-elle à Alex et combien à Célia ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Répartir quatre quantités inégales au départ en vue de les égaliser, une des deux plus grandes quantités étant diminuée au profit d'une seule des plus petites et l'autre au profit des deux plus petites.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'à la fin chacun doit avoir le même nombre de pommes, que pour cela deux enfants (ceux qui en ont le plus) doivent en donner aux deux autres (ceux qui en ont le moins) et que l'un d'eux n'en donne qu'à un seul de ses camarades alors que l'autre en donne à deux de ses camarades.
- Procéder par essais et ajustements (simulation de distribution), en respectant les contraintes de l'énoncé, par exemple : Bill en donne 2 à Alex : il en a 21 et Alex en a 15. Si Dora veut en avoir 21, elle doit en donner 3 mais alors Alex et Célia n'en auront pas 21. Il faut donc que Bill en donne davantage… et continuer jusqu'à ce que chaque enfant ait le même nombre de pommes.

Ou procéder par déductions :

Calculer le nombre total de pommes (76), puis ce que chacun doit avoir (19 pommes).

Donc Bill doit donc en donner 4, mais à un seul de ses camarades, il ne peut pas les donner à Célia (qui en aurait 20). Il les donne donc à Alex qui en a alors 17. Et Dora doit en donner 2 à Alex et 3 à Celia.

Niveau : 3, 4

Origine : Bourg-en-Bresse

2. LE PETIT POUCET ET SES FRÈRES (Cat. 3, 4)

Le Petit Poucet et quatre de ses frères marchent dans la forêt, en file indienne.

Le Petit Poucet est le dernier de la file et sème des miettes de pain pour retrouver le chemin du retour.

Ils passent près d'un arbre où est installé un écureuil qui les observe.

André passe devant l'écureuil avant Bernard.

Joseph passe devant l'écureuil avant Mario.

Il y a un seul des frères entre André et Mario.

Dans quel ordre peuvent marcher le Petit Poucet et ses frères ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

À partir d'indications sur l'ordre dans lequel se trouvent 4 éléments, reconstituer l'ordre ~~total~~ dans lequel ils sont placés.

Analyse de la tâche

- Imaginer la situation et interpréter correctement les informations, en particulier se rendre compte que « avant » ne doit pas être interprété comme « juste avant » (ce qui rendrait la résolution impossible).
- Procéder par déductions à partir de certaines indications, par exemple :

  Placer d'abord André, Bernard et le Petit Poucet (A, B, P) ou Joseph, Mario et le Petit Poucet (J, M, P)

  Placer les deux autres frères en respectant les autres contraintes, par exemple en partant de (A, B, P), il faut placer encore J et M dans cet ordre, ce qui aboutit à 6 possibilités (J, M, A, B, P ; J, A, M, B, P ; J, A, B, M, P ; A, J, M, B, P ; A, J, B, M, P ; A, B, J, M, P)

  Éliminer les ordres qui ne respectent pas la dernière contrainte et retenir les deux possibilités A, J, M, B, P et J, A, B, M, P

Ou, procéder par déductions et essais avec vérification des contraintes, par exemple à partir d'un schéma du type (en partant de la dernière et de la première indication) : A _ M et P en dernier

Ou, procéder par essais (en plaçant P en dernier) et en vérifiant les contraintes.

Niveau : 3, 4

Origine : 06.I.01

3. DES PAILLES EN CARRÉS (Cat 3, 4)

Alice et Bruno ont beaucoup de pailles, toutes de la même longueur. Avec ces pailles, ils s'amusent à construire des carrés.

Avec 20 pailles, Alice a formé 5 carrés. Chaque carré a une paille pour côté.

Avec 20 pailles aussi, en les disposant de manière plus astucieuse, Bruno a réussi à former 7 carrés. Chaque carré a une paille pour côté.

Avec 29 pailles, combien pouvez-vous au maximum former de carrés dont chaque côté est une paille.

Faites un dessin qui montre comment vous avez disposé les 29 pailles pour former les carrés.

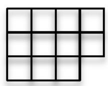
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

À partir de 29 segments isométriques, construire un assemblage de carrés qui comporte le plus grand nombre possible de carrés, chacun ayant un segment pour côté.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les carrés doivent tous avoir la même longueur de côté, c'est-à dire une paille pour côté et pas d'extrémité de paille isolée.
- Comprendre que les cinq carrés d'Alice sont séparés les uns des autres (de 20 : 4 = 5 ou 4 x 5 = 20) et que pour arriver à sept carrés, Bruno n'a pas formé des carrés séparés les uns des autres car il aurait alors eu besoin de 28 pailles. Il a dû former des carrés avec des côtés en commun pour « économiser » des pailles et se représenter la disposition des pailles.
- Avec 29 pailles, comprendre que, comme avec 20 pailles, toutes doivent être utilisées pour arriver au maximum de carrés et par conséquent que les carrés doivent avoir des côtés communs avec d'autres carrés)
- Procéder par essais et continuer d'assembler des carrés de sorte que certains d'entre eux aient plus d'un côté en commun avec d'autres carrés pour obtenir un arrangement optimal de 11 carrés dans la configuration suivante :



Niveaux : 3, 4

Origine : Sienne

4. ÉCHANGE DE BILLES (Cat. 3, 4, 5)

Claude et Patrick se préparent à faire un échange de billes. Avant l'échange, Claude a deux billes de plus que son copain. Il propose à Patrick :

« Je te donne autant de billes que tu en as. Ensuite, tu me donneras autant de billes qu'il m'en restera. »

Les deux garçons font cet échange.

Après l'échange, les deux enfants constatent qu'ils ont tous les deux le même nombre de billes.

Combien de billes chacun des deux garçons avait-il avant l'échange ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver deux nombres qui diffèrent de 2 et tels que si après avoir doublé le plus petit et diminué le plus grand de la valeur du plus petit, puis, partant des valeurs obtenues, recommencer la même opération, on obtient deux valeurs égales.

Analyse de la tâche

- Comprendre les données du problème, c'est-à-dire que :
  - les deux garçons possèdent au départ des quantités différentes de billes et que Claude en a deux de plus que Patrick.
  - Claude donne à Patrick un nombre de billes égal à ce que Patrick possède déjà et ensuite que Patrick fait de même avec Claude.
  - à chaque étape, le nombre de billes de celui qui donne diminue d'une certaine quantité et qu'en même temps le nombre de billes de celui qui reçoit double.
- Procéder par essais de quantités qui diffèrent de 2 et par calcul en appliquant les opérations successives.

Ou, procéder par essais en schématisant les quantités de billes et en procédant aux actions successives.

Conclure que la solution est : « Claude avait 5 billes avant l'échange et que Patrick avait 3 billes ».

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Luxembourg

5. PHOTOS DE FOOTBALLEURS (Cat. 3, 4, 5)

André, Bernard, François, Jean et Pierre collectionnent des photos de footballeurs.

C'est Pierre qui en possède le moins. Mais en réunissant les siennes avec celles de Jean, on obtient un nombre de photos qui est le double du nombre de photos de Bernard.

François en a plus que Jean.

André en a autant que celles de Pierre et de François réunies.

Écrivez les noms des 5 enfants, de celui qui a le moins de photos de footballeurs jusqu'à celui qui en a le plus.

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Ordonner cinq nombres inconnus à partir d'informations données sur l'ordre de certains de ces nombres et de relations numériques qui les lient.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut ordonner les cinq personnages selon le nombre de photos qu'ils possèdent, en respectant les conditions données.
- Procéder par essais de différents ordres et vérification de leur compatibilité avec les conditions du problème (cette procédure n'assure l'unicité de la réponse que si tous les ordres sont testés).

Ou

- Procéder par déduction, par exemple :
  - L'ordre de 3 des personnages est défini explicitement par les phrases "C'est Pierre qui en possède le moins" et "François, en a plus que Jean" : $P < J < F$) ;
  - La place d'André comme celui qui en a le plus que les trois précédents peut être déduite de la phrase "André en a autant que Pierre et François réunis", assurant qu'il en a plus que François. On a donc : $P < J < F < A$
  - Il ne reste donc plus qu'à placer Bernard en utilisant la phrase « Mais en réunissant les siennes (celles de Pierre) avec celles de Jean, on obtient un nombre de photos qui est le double du nombre de photos de Bernard». Si on avait $B \geq J$, on aurait $2B > P + J$ puisque P en a moins que tous les autres. On en déduit que $P < B < J$ et l'ordre des 5 collectionneurs.

Ou, procéder en donnant aux quantités de photos des valeurs numériques qui respectent les conditions du problème et conclure à partir de l'ordre de ces valeurs, en faisant un seul ou plusieurs essais de valeurs numériques (cette procédure n'assure pas de l'unicité de la réponse). Des cartes portant les quantités essayées peuvent être utilisées.

Ou, procéder en utilisant plusieurs des procédures précédentes, par exemple déduction pour ranger 3 ou 4 des collectionneurs, puis essais pour placer Bernard.

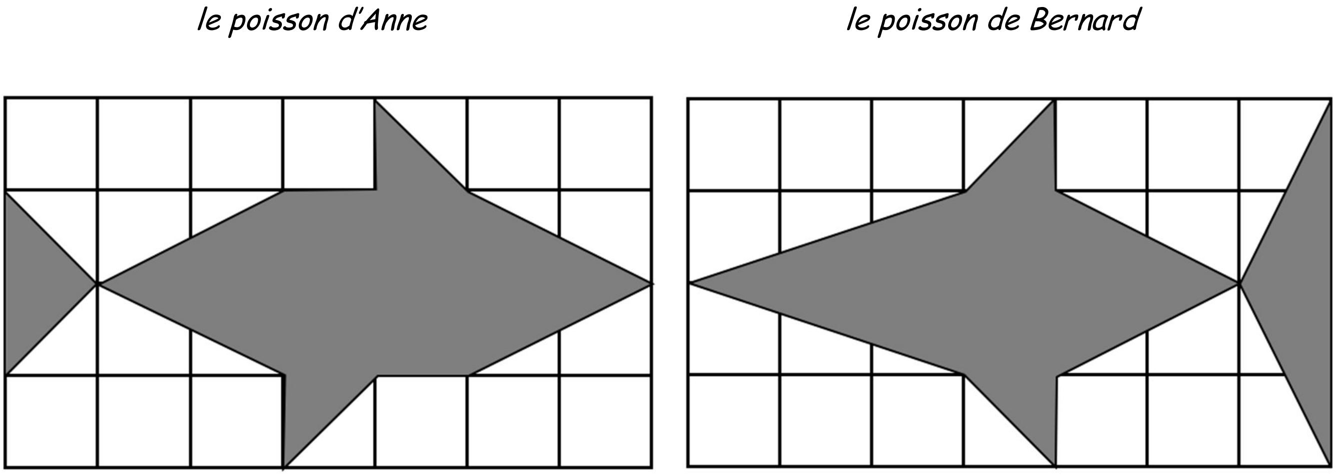
Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Sienne

6. LES DEUX POISSONS (Cat. 4, 5, 6)

Anne et Bernard ont chacun réalisé un poisson sur deux feuilles quadrillées de même taille. Ils ont réalisé leurs poissons en assemblant des pièces grises ayant ces formes :

Les figures suivantes montrent les poissons réalisés par les deux enfants :



Anne est certaine que son poisson est plus grand que celui de Bernard, c'est-à-dire qu'il occupe une partie plus importante de la feuille. À l'inverse, Bernard est convaincu que c'est son poisson qui est le plus grand.

Indiquez qui a raison, Anne, Bernard ou aucun des deux ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer l'aire de deux figures sur quadrillage qui sont des assemblages de quatre types de polygones (un carré 1 x 1 et trois triangles qui sont respectivement la moitié d'un rectangle 1 x 1, 1 x 2 et 1 x 3).

Analyse de la tâche

- Observer les poissons en ayant à l'esprit qu'ils ont été faits en utilisant uniquement les types de pièces mentionnés.
- Dessiner un pavage de chaque figure avec les pièces à disposition et voir que le poisson d'Anne est formé de 4 carrés, de 4 petits triangles et 4 triangles moyens, tandis que le poisson de Bernard est formé de 2 carrés, de 2 petits triangles, de 4 triangles moyens et de 2 grands triangles.
- Comprendre que pour comparer les surfaces occupées par les poissons, il est nécessaire de comparer leurs aires et non le nombre de pièces nécessaires pour réaliser chacune des surfaces, ni même les contours des surfaces (leurs périmètres).
- Faire le choix d'une unité d'aire pour comparer les aires des deux figures : se rendre compte qu'un petit triangle est la moitié d'un carré 1 x 1 et donc que 2 petits triangles sont équivalents à un carré, qu'un triangle moyen est la moitié d'un rectangle d'aire deux carrés et donc que 2 triangles moyens sont équivalents à 2 carrés, et enfin, qu'un grand triangle est la moitié d'un rectangle d'aire 2 carrés et donc que 2 grands triangles sont équivalents à 3 carrés.
- Exprimer les aires des deux figures en prenant pour unité un carré du quadrillage :
  Poisson d'Anne : 10 = 4 + 2 + 4 (carrés) ; Poisson de Bernard : 10 = 2 + 1 + 4 + 3 (carrés)
  Le choix peut également être fait de prendre pour unité d'aire celle d'un petit triangle.

- La procédure peut être simplifiée en retirant les parties des deux figues qui sont constituées avec les mêmes pièces : comparer les aires des deux figures revient à comparer les aires de surfaces composées l'une de 2 carrés et 2 petits triangles (poisson d'Anne) et l'autre de 2 grands triangles (poisson de Bernard).

Ou, même démarche que ci-dessus, mais en comparant les surfaces non occupées par les poissons.

Ou, après avoir pavé chaque figure avec les pièces à disposition, découper le pavage obtenu et réagencer les pièces de façon à obtenir deux nouvelles figures dont les aires sont plus faciles à comparer par superposition des figures ou par dénombrement des pièces choisies comme unité d'aire (carré ou petit triangle) (par exemple, le poisson d'Anne permet de reconstituer facilement un rectangle de 2 × 5 côtés de carré et ce rectangle peut parfaitement être recouvert avec les 10 pièces du poisson de Bernard).

- Déduire qu'aucun enfant n'a raison parce que les deux figures ont la même aire.
  L'erreur qui consiste à comparer les nombres de pièces nécessaires pour recouvrir chaque poisson conduit à répondre que c'est Anne qui a raison : elle a utilisé 12 pièces alors que Bernard en a utilisé 10.

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Sienne

7. METTRE LA TABLE (Cat. 5, 6)

Chaque soir, Marc a pour tâche de mettre la table à la maison, mais il a la fâcheuse habitude de trouver des excuses pour ne pas le faire.

Sa maman lui propose un accord pour les 25 jours qui restent avant Pâques :
- À pâques, tu recevras 3 œufs pour chaque jour où tu auras mis la table et tu m'en donneras 12 pour chaque jour où tu ne l'auras pas fait ».

À Pâques, sa maman lui dit :
- C'est très simple, je ne te donne pas d'œufs, mais tu ne dois pas m'en donner non plus.

Combien de jours Marc n'a pas mis la table au cours de cette période ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver deux nombres dont la somme est 25 et tel que le triple de l'un soit égal au produit de l'autre par 12.

Analyse de la tâche

- Comprendre que pendant les 25 jours Marc a mis la table certains soirs et qu'il ne l'a pas fait d'autres soirs. Comprendre également que le nombre d'œufs qu'il aurait dû recevoir et le nombre d'œufs qu'il aurait dû donner s'équilibrent.
- Procéder par essais et ajustements, par exemple partir de l'hypothèse « 12 jours où il a mis la table et 13 où il ne l'a pas mise » et calculer le nombre d'œufs correspondant, puis, ajuster progressivement le nombre de jours jusqu'à atteindre l'égalité des œufs reçus et donnés.

Ou, comme $12 = 3 \times 4$, constater que 1 jour où il n'a pas mis la table doit être équilibré par 4 jours où il l'a mise ; il faut donc 1 jour sur 5 où il met la table pour atteindre l'égalité des œufs reçus et donnés, donc 5 où il ne met pas la table sur les 25.

Conclure que Marc n'a pas mis la table 5 jours.

Niveaux : 5, 6

Origine : d'après 06.I.08

8. LES DVD DE LUC (Cat. 5, 6)

Luc possède 2 DVD de la série « Madagascar » (*Madagascar 1 et Madagascar 2*) et 3 DVD de la série « L'âge de glace » (*L'âge de glace 1, L'âge de glace 2 et L'âge de glace 3*).

Il décide de les placer sur un rayon de sa bibliothèque, les uns à côté des autres, de manière que les DVD d'une même série soient toujours les uns contre les autres.

Par exemple, de gauche à droite, il pourrait les placer dans l'ordre suivant : *L'âge de glace 3, L'âge de glace 1, L'âge de glace 2, Madagascar 1, Madagascar 2*.

Mais Luc constate qu'il y a bien d'autres façons de placer ses DVD sur le rayon de l'étagère, toujours de manière que les DVD d'une même série soient les uns contre les autres.

De combien de façons différentes Luc peut-il placer ses DVD sur le rayon ?

Écrivez toutes les façons que vous avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le nombre de permutations de cinq objets en deux groupes compacts de deux et de trois objets.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a 2 DVD d'une série et 3 d'une autre, numérotés dans un ordre séquentiel à l'intérieur de chaque série.
- Comprendre que les 5 DVD doivent être disposés les uns à côté des autres mais que ceux d'une même série doivent rester groupés.
- Constater qu'il n'y a que deux ordres possibles au sein de la série *Madagascar* (M) : M1-M2 ou M2-M1 et que pour la série *L'âge de glace* (L), il y a 6 ordres possibles L1-L2-L3 ; L1-L3-L2 ; L2-L1-L3 ; L2-L3-L1 ; L3-L1-L2 ; L3-L2-L1.
- En combinant les possibilités mentionnées ci-dessus (présentées sous forme de listes, de tableaux, de diagrammes en arbre…) on constate qu'il y a 12 dispositions possibles des 12 DVD lorsque la série M précède la série L :

M1-M2-L1-L2-L3	M2-M1- L1-L2-L3
M1-M2-L1-L3-L2	M2-M1- L1-L3-L2
M1-M2-L2-L1-L3	M2-M1- L2-L1-L3
M1-M2-L2-L3-L1	M2-M1- L2-L3-L1
M1-M2-L3-L1-L2	M2-M1- L3-L1-L2
M1-M2-L3-L2-L1	M2-M1- L3-L2-L1

  Finalement, observer qu'on peut intervertir les deux séries en plaçant d'abord les trois DVD de la série L puis les deux de la série M, ce qui double le nombre des dispositions 12 × 2 = 24

Ou procéder par essais non organisés avec le risque de ne pas découvrir toutes les dispositions.

Niveau : 5, 6
Origine : Udine

9. ALICE ET LES MAISONS DU PAYS DES MERVEILLES (Cat. 5, 6, 7)

Alice aperçoit 3 belles maisons au Pays des Merveilles.

Elle souhaite entrer dans chacune de ces maisons, mais, elle va devoir essayer beaucoup de clés parce que :

- chaque maison possède 3 portes, dont une seule permet d'entrer dans la maison ;
- sur chaque porte il y a 3 serrures, dont une seule permet d'ouvrir la porte ;
- à côté de chaque serrure sont accrochées 3 clés, dont une seule rentre dans la serrure.

Après avoir essayé beaucoup de clés, elle a réussi à entrer dans toutes les maisons et il y a encore 23 clés qu'elle n'a pas essayées.

Combien de clés Alice a-t-elle essayées ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le nombre de cas possibles lors d'une expérience offrant quatre choix successifs, chacun d'eux offrant trois possibilités (nombre total de cas possibles : 3^4), puis le nombre de cas testés connaissant le nombre de cas non testés.

Analyse de la tâche

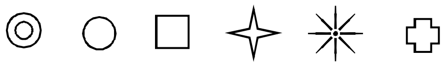
- Imaginer la situation, s'approprier la démarche d'essais des clés et comprendre que, pour trouver le nombre de clés qu'Alice a essayées, il faut trouver la différence entre le nombre total de clés et le nombre de clés qu'Alice n'a pas essayées (23). Une représentation de la situation peut faciliter cette appropriation.
- Déterminer le nombre total de clés, par exemple par un des raisonnements suivants :
  Il y a 3 maisons donc 9 portes (3 x 3), donc 27 serrures (9 x 3) donc 81 clés (27 x 3).
  Il y a 3 clés par serrure, donc 9 clés sur une porte, donc 27 clés par maison, donc 81 clés en tout.
  Cette détermination du nombre total de clés peut s'appuyer sur des représentations, des graphes
  Conclure que le nombre d'essais réalisé par Alice est 58 (81 − 23).

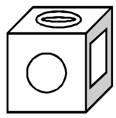
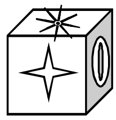
Niveau : 5, 6, 7

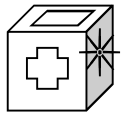
Origine : Udine

10. LA FACE CACHÉE DU CUBE (Cat. 5, 6, 7)

Sur chacune des faces d'un cube on a dessiné une des 6 figures ci-dessous :



a)  b) 

c) 

Les six figures sont toutes dessinées sur le cube.

A droite, on peut voir le cube représenté dans trois positions différentes :

Quelle est la figure dessinée sur la face opposée à celle sur laquelle est dessiné le cercle  **?**

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer la figure tracée sur une face cachée d'un cube par un raisonnement logique d'exclusion des cas.

Analyse de la tâche

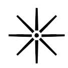
- Construire un cube (ou son patron) et y dessiner sur ses faces les figures d'une des vues, par exemple a) , puis en observant la vue c), et en déplaçant le cube, voir qu'il n'y a qu'une seule manière de placer les figures des deux autres faces contiguës à celle du carré. La face opposée au cercle est celle de l'étoile à huit branches. Vérifier éventuellement que la vue b) est compatible avec cette disposition.

Ou

- Constater que chaque vue détermine les positions relatives de trois figures et que ce sont celles qu'on retrouve sur deux vues qui permettront de déterminer les positions relatives des six figures :

  A chaque fois qu'une figure est sur deux vues, on connaît aussi les figures des quatre faces adjacentes à celle de la figure commune et encore, par élimination, que la sixième figure est sur la face opposée. Il y a ainsi trois cas où une figure est commune à deux vues, qui permettent de savoir que :

  - le carré est sur les vues a) et c), avec le cercle, le double cercle, la croix et l'étoile à huit branches sur les faces adjacentes, et l'étoile à 4 branches, est sur la face opposée à celle du carré ;
  - le double cercle est sur les vues a) et b), avec le cercle, le carré, l'étoile à quatre branches et l'étoile à huit branches sur les faces adjacentes, et la croix est sur la face opposée à celle du double cercle ;
  - l'étoile à huit branches est sur les vues b) et c), avec le double cercle, la croix et le carré et l'étoile à quatre branches sur les faces adjacentes, et le cercle est sur la face opposée à celle de l'étoile à huit branches.

- Ce dernier cas donne la réponse du problème : la figure dessinée sur la face opposée au à celle du cercle est  (l'étoile à huit branches).

  On remarque en passant que les vues b et c suffisent pour déterminer la réponse comme dans la première procédure, et que l'analyse des deux premiers cas est superflue. En effet, on peut déduire des vues b et c que l'étoile à 4 branches ne peut être opposée ni à l'étoile à 8 branches ni au double cercle ni à la croix ni au carré. En déduire qu'elle est opposée au cercle

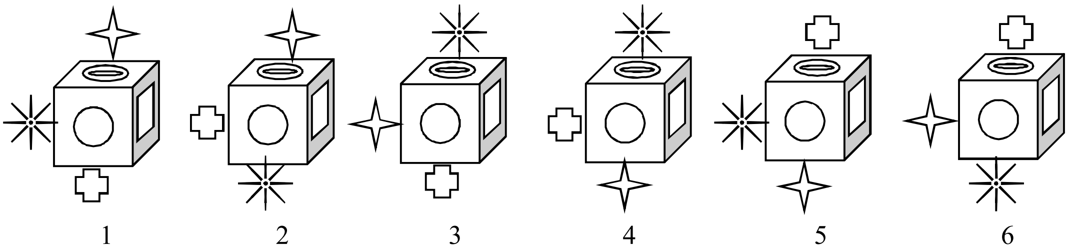
Ou

- À partir d'un des deux premiers cas ci-dessus où les quatre figures des faces adjacentes à celle de la figure commune, sont déterminées, tenir compte de « l'orientation » du cube.

  Par exemple, pour les vues a) et c), si l'on place une montre sur la face du carré, la première vue montre que le cercle précède le double cercle dans le sens de rotation des aiguilles puis, d'après la deuxième vue que l'étoile à huit branches précède la croix. On en déduit que le double cercle vient après le cercle et avant l'étoile à huit branches, ces deux figures étant dessinées sur des faces opposées.

Ou

- Conduire une analyse de type combinatoire. Par exemple, une exploration systématique à partir de a) permet d'éliminer les deux figures des faces adjacentes à celle du cercle (le carré et le double cercle) et d'envisager les 6 dispositions des trois autres figures sur les trois faces non visibles. puis de représenter ces 6 cubes en perspective (ou construire des patrons) en plaçant les figures sur les faces, selon les vues b) et c) :

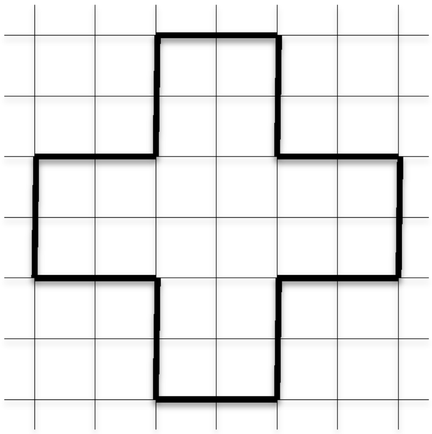


Niveaux : 5, 6, 7

Origine : 18.F.08

11. UNE ÉTRANGE CROIX (Cat. 6, 7, 8)

Jean a dessiné une croix à branches égales sur un quadrillage comme ci-dessous.



Maintenant il veut dessiner un carré ayant la même aire que la croix. Tous ses sommets doivent être sur le contour de la croix et à l'intersection de deux lignes du quadrillage.

Dessinez tous les carrés que Marc peut dessiner ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

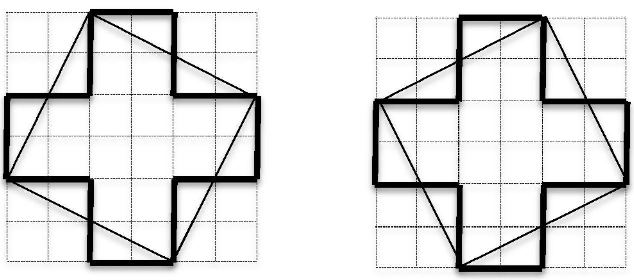
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer quels points du contour d'une croix à branches égales dessinée sur un quadrillage peuvent être les sommets d'un carré ayant la même aire que la croix

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut construire un carré joignant quatre points du pourtour de la croix, dont l'aire doit être égale à celle de la croix.
- Déterminer l'aire de la croix en prenant pour unité un carreau du quadrillage et en dénombrant les carreaux contenus dans la croix. L'aire est de 20 unités.
- Comprendre que puisque 20 n'est pas le carré d'un nombre entier, les côtés du carré ne peuvent pas suivre les lignes du quadrillage.
- Procéder par essais successifs afin d'arriver aux deux configurations suivantes qui sont des carrés égaux :



Vérifier que l'aire du carré est bien 20 unités soit en comparant son aire à celle de la croix en fonctionnant par compensation (par exemple un triangle contenu dans le carré mais pas dans la croix est identique à un triangle contenu dans la croix mais pas dans le carré), soit en déterminant l'aire des figures intérieures au carré (par exemple en dénombrant les carrés entiers: 12, la surface restante peut être vue comme constituée de 8 triangles rectangles moitiés d'un rectangle 2×1 et donc d'aire 1 unité. On arrive à $12 + 8 = 20$)

Ou, chercher la longueur du côté d'un carré dont l'aire est 20. Pour cela chercher un nombre dont le produit par lui-même est égal à 20 ou le plus proche de 20 ($4{,}5 \times 4{,}5 = 20{,}25$) Construire un carré de côté 4,5 unités de côté (l'unité est le côté de carreau), le découper et le placer sur le quadrillage de façon à ce que ses 4 sommets soient sur le contour de la croix. En rester là ou après avoir tracé le carré, vérifier que son aire est précisément 20 (cf. stratégie précédente).

Ou, après avoir déterminé l'aire de la croix et dessiné un des deux carrés, en prenant pour unité de longueur un côté du carreau du quadrillage, calculer la longueur d'un côté du carré en utilisant le théorème de Pythagore. Par exemple : $\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$, puis son aire : $\sqrt{20}^2=20$.

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Milan

12. LES RUES DE TRANSALPINA (Cat. 6, 7, 8)

Dans la commune de Transalpina, les numéros des maisons sont réalisés en carreaux de faïence sur lesquels un chiffre est écrit :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pour écrire un numéro de maison qui a plus d'un chiffre on accole ces carreaux par deux ou plus si nécessaire.

Ainsi, pour écrire le numéro 53, on accole un carreau avec le chiffre 5 et un autre avec le chiffre 3 de la manière suivante :

5 3

Dans la rue des Ormes, la numérotation commence à 1 et chaque numéro correspond à une maison et aucun numéro n'est sauté. Pour numéroter les maisons, on a utilisé en tout 672 carreaux de faïence.

Quel est le dernier numéro de la rue des Ormes ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer un entier naturel *n* sachant qu'il faut 672 chiffres pour écrire tous les entiers naturels de 1 à n compris.

Analyse de la tâche

- Comprendre que l'on veut numéroter les maisons d'une rue en utilisant des carreaux de faïence sur lesquels un seul chiffre est écrit.
  Comprendre qu'il faut déterminer le dernier numéro de la rue en sachant que 672 carreaux ont été utilisés, c'est à dire en sachant que 672 chiffres ont été écrits à partir du numéro 1 jusqu'à la fin de la rue.
  Comprendre que le dernier numéro de la rue correspond aussi au nombre de maisons de la rue.
- Procéder par essais, en attribuant un numéro à la dernière maison de la rue. Par exemple :
  Supposer que 50 est le dernier numéro de la rue, dénombrer tous les chiffres utilisés pour écrire les nombres 1 à 50 : 9 nombres à 1 chiffre + 20 (10 nombres à 2 chiffres pour aller à 19) + 20 (10 nombres à 2 chiffres pour aller à 29) + 40 (20 nombres à 2 chiffres pour aller à 49) + 2 (chiffres du nombre 50 supposé comme étant le dernier de la rue) = 91 chiffres : ce qui est trop peu.
  Prendre un nombre plus grand et refaire le compte des chiffres utilisés pour écrire ce nombre et tous ceux qui le précèdent. C'est un processus long qui peut engendrer de nombreuses erreurs de calcul.

Ou organiser le comptage des chiffres dans l'écriture des nombres, par exemple :

de 1 à 10 → 11 chiffres
de 11 à 20 → 20 chiffres
de 21 à 30 → 20 chiffres
………………..
de 91 à 100 → 21 chiffres

⟹ de 1 à 100 → 11 + 8 × 20 + 21 = **192 chiffres**

de 101 à 200 → 300 chiffres
de 201 à 300 → 300 chiffres

⟹ de 101 à 200 → **300 chiffres**
de 101 à 300 → 300 + 300 = **600 chiffres**

Donc de 1 à 200 → **492 chiffres**
et de 1 à 300 → **792 chiffres**

Conclure que le nombre cherché est compris entre 201 et 300.

En déduire qu'il faut calculer la différence 672 - 492 = 180 pour trouver le nombre de chiffres à ajouter à 492 pour atteindre 672.

Et que puisque, dans cet intervalle, les nombres sont des nombres de 3 chiffres, il faut ajouter 180 : 3 = 60 numéros aux 200 premiers pour atteindre un total de 672 chiffres.
Conclure que le dernier numéro de la rue des Ormes est le 260.

Ou

Procéder par soustractions successives, en partant du nombre de chiffres, par exemple :
672 − 9 = 663 → il y a 9 carreaux avec un numéro à un chiffre qui numérotent les 9 premières maisons,
663 − 180 = 483 → il y a 180 carreaux avec un numéro à deux chiffres qui numérotent les 90 maisons de la 10e à la 99e,
483−300 = 183 → il y a 300 carreaux avec un numéro à trois chiffres qui numérotent les 100 maisons de la 100e à la 199e), se rendre compte qu'on ne peut pas numéroter une centaine de maisons supplémentaires avec les carreaux restants et procéder par un comptage de trois en trois (ou effectuer la division 183 : 3) pour dénombrer les dernières maisons (61).
Calculer la somme 9 + 90 + 100 + 61 = 260 qui correspond au nombre de maisons de la rue.

Ou

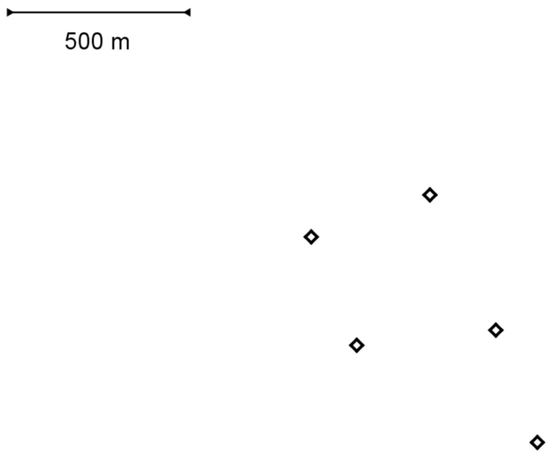
Procéder également par soustractions successives, en considérant d'abord les nombres à un et deux chiffres qui numérotent les 99 premières maisons : 672−9 = 663 ; 663−180 = 483, il reste 483 carreaux à utiliser ;
diviser ce nombre par 3 pour trouver que dans la rue il y a 161 maisons qui comportent un numéro à 3 chiffres (483 : 3 = 161), ajouter 99 à 161 et conclure qu'il y a 260 maisons dans la rue (99 + 161 = 260).

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Sienne

13. L'ANTENNE RELAIS (Cat 7, 8)

Sur le plan ci-dessous les cinq petits carrés représentent 5 fermes isolées dans la montagne de Transalpie. Pour que les habitants puissent utiliser leur téléphone mobile, on doit installer une antenne relais à moins de 500 m de chaque maison. L'échelle est indiquée en haut à gauche sur le plan.



Coloriez sur le plan la zone où l'antenne peut être installée.

Laissez les traces de vos constructions et expliquez comment vous avez fait.

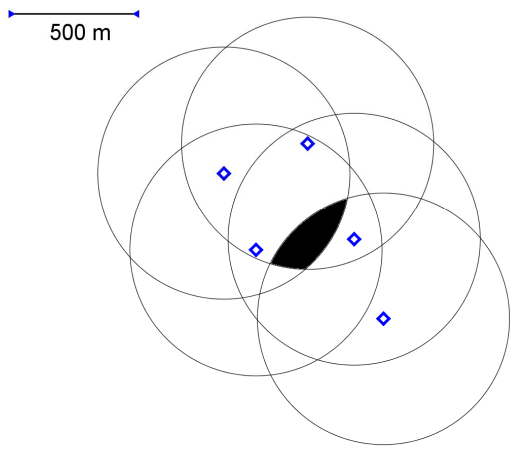
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer l'espace géométrique des points dont la distance à des points donnés est inférieure à la longueur d'un segment donné.

Analyse de la tâche

- Comprendre que l'antenne doit être à moins de 500 m de chacune des maisons.
- Comprendre que sur le plan, la distance maximum acceptable de l'antenne aux maisons est représentée par le segment donné.
- Comprendre qu'il faut colorier la partie du plan dont les points sont situés à une moins grande distance de toutes les maisons que la longueur du segment donné.
  Reconnaitre que si un point est à moins de 500 m d'une ferme, il est à l'intérieur d'un cercle ayant pour centre cette ferme et de rayon 500 m. Partant de là, tracer les 5 cercles de rayon donné par le segment, centrés sur les 5 maisons.
- Colorier la partie du territoire qui est à l'intérieur de tous ces cercles. Cela donne le dessin ci-contre.
- Expliquer que l'espace colorié sans les bords représente les endroits où l'on peut installer l'antenne.
- Observer éventuellement que l'antenne ne peut être installée sur les bords de l'espace colorié



Ou

Utiliser la règle pour reporter l'unité d'échelle donnée dans différentes directions à partir de chaque maison, et tracer ensuite le contour d'une zone qui soit à moins de 500 m de chacune d'elles, zone qui sera de toute façon approximative.

Niveaux : 7, 8

Origine : Franche-Comté

14. DES BONDS DE KANGOUROU (Cat. 7, 8)

Une mère kangourou quitte la tanière avec son petit dans la poche et traverse la clairière pour atteindre le cours d'eau. Elle avance régulièrement en faisant des bonds de 8m chacun. Elle revient ensuite par le même chemin, toujours avec des bonds de 8m. À mi-chemin, cependant, elle s'arrête, laisse le bébé quitter la poche et continue le chemin en sautant avec lui jusqu'à la tanière, avec des sauts réguliers de 4m chacun.

Finalement, la mère kangourou a fait pour l'aller et le retour 135 bonds en tout, entre les bonds de 8 m et ceux de 4 m.

Combien de mètres a parcouru le petit kangourou en sautant sur ses propres pattes ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer la distance exprimée en mètres qui est parcourue en faisant des bonds de 4 m, sachant que le nombre total de bonds pour couvrir un parcours en en faisant les trois quarts avec des bonds de 8 m et le quart restant avec des bonds de 4 m est 135.

Analyse de la tâche

- Comprendre que, puisque la mère kangourou suit le même trajet à l'aller et au retour, la distance parcourue est la même à l'aller et au retour.
- Comprendre que la mère va faire sur la deuxième moitié du trajet retour des bonds moitié moins longs que ceux réalisés jusque-là et que donc pour rejoindre la tanière, elle fera sur ce tronçon le double de nombre de bonds de celui qu'elle a fait sur la première moitié du trajet retour.
- Se rendre compte que, à l'aller, tout comme sur la deuxième moitié du trajet retour, le nombre de bonds de la maman kangourou correspond au double du nombre de bonds effectués sur la première moitié du trajet retour. En tout, il y a donc 5 fois ce dernier nombre.
- Déduire que, sur une moitié du trajet, on peut faire 135 : 5 = 27 bonds de 8 m ou 54 (= 27 x 2) bonds de 4 m.
- Conclure que le petit kangourou a sauté seul sur 54 x 4m = 216m.

Ou

Comprendre que le parcours est formé de quatre parties dont les trois premières sont chacune parcourues en faisant le même nombre de bonds et la dernière en en faisant le double. Procéder ensuite par essais organisés. Par exemple :
15 + 15 + 15 + 30 = 75
25 + 25 + 25 + 50 = 125
26 + 26 + 26 + 52 = 130
27 + 27 + 27 + 54 = 135

Ou

Avec des essais organisés quant au nombre de sauts pour l'aller et des mètres parcourus, on détermine ceux du retour jusqu'à obtenir 135 m i

aller	retour	Nombre de sauts A/R
50×8 = 400 m	(25×8)+(50×4) = 400 m	125
60×8= 480 m	(30 ×8)+(60×4) = 480 m	150
54×8 = 432 m	(27×8)+(54×4) = 432 m	135

Ou (en catégorie 8 uniquement, mais improbable)

- Si par exemple x désigne le nombre de bonds de 8 m faits à l'aller, $\frac{x}{2}$ est alors le nombre de bonds effectués dans la première moitié du trajet retour et $x = 2\,\frac{x}{2}$ est le nombre de bonds faits dans la deuxième moitié du trajet retour. Ecrire l'équation

$2x + \frac{x}{2} = 135$ et trouver la solution $x = 54$ (le nombre de bonds de 8 m faits à l'aller et aussi le nombre de sauts de 4 m). Déduire que le petit kangourou parcourt 216m.

Niveaux : 7, 8

Origine : Sienne

15. COMME C'EST BON, LES FRUITS ! (Cat. 7, 8)

Dans l'école de Marc, une enquête a été faite sur les fruits consommés par les élèves. Tous ont répondu, y compris les 60 élèves qui ont déclaré ne jamais manger de fruits.

Il est ressorti de cette enquête que 46 élèves mangent des poires et que 120 élèves mangent des pommes. De plus, on a appris que :

16 élèves mangent aussi bien des poires que des cerises, mais pas de pommes ;

12 mangent des cerises et des pommes, mais pas de poires ;

8 mangent des poires, mais ne mangent ni cerises ni pommes ;

17 mangent des cerises, mais pas de poires, ni de pommes ;

15 élèves ont déclaré qu'ils mangent les trois sortes de fruits (pommes, poires et cerises).

Combien y a-t-il d'élèves dans l'école de Marc ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le nombre d'élèves d'une école à partir d'indications sur le nombre d'éléments de certains sous-ensembles ou intersections de sous-ensembles de l'ensemble total des élèves.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les résulttas de l'enquête ne concernent que 3 types de fruits (pommes, poireset cerises).
- Des 3 informations : 16 élèves ne mangent que des cerises et des poires,
  8 élèves mangent des poires mais pas de cerises ni de pommes,
  15 élèves mangent les trois sortes de fruits

  déduire qu'il y a 46 – (16+8+15) = 7 élèves qui mangent seulement des pommes et des poires (mais pas de cerises).

  Ainsi, les étudiants qui ne mangent que des pommes sont 120 - (12 + 15 + 7) = 86

  Le nombre d'élèves de l'école est obtenu en additionnant les élèves qui mangent des fruits : 86 + 17 + 8 + 7 + 12 + 16 + 15 = 161 avec 60 qui ne mangent pas de fruits. On obtient ainsi le nombre d'élèves : 221.

Ou

Le nombre d'élèves de l'école peut être calculé en additionnant 120 (élèves qui mangent des pommes) avec ceux qui ne mangent pas de pommes, soit 17 (qui ne mangent que des cerises), 16 (qui mangent des poires et des cerises), 8 (qui ne mangent que les poires) et 60 (qui ne mangent pas de fruits). Le résultat est que le nombre d'élèves est de 221.

Ou

- Se rendre compte que le choix des trois types de fruits permet une répartition des étudiants en sous-ensembles (ou parties) dont on connaît le nombre d'léments de la réunion de certains d'entre eux.
- Organiser les données en huit groupes, par exemple en les énumérant de cette façon :

un sous-ensemble de ceux qui mangent les trois types de fruits :

les pommes, les poires, les cerises (15)

trois sous-ensembles de ceux qui mangent deux sortes de fruits :

pommes, poires, ~~cerises~~

pommes, ~~poires~~, cerises (12)

~~pommes~~, poires, cerises (16)

trois sous-ensembles de ceux qui ne mangent qu'un fruit :

pommes, ~~poires, cerises~~

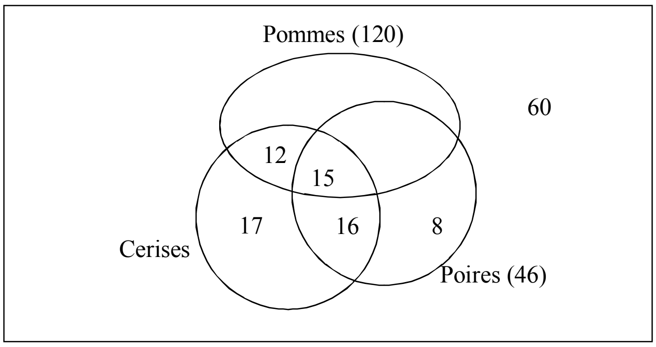
~~pommes, poires~~, cerises (17)

~~pommes~~, poires, ~~cerises~~ (8)

un sous-ensemble de ceux qui ne mangent pas de genre de fruit :

~~pommes, poires, cerises~~ (60)

Ce raisonnement peut être visualisée par une représentation de ce genre :



Elèves de l'école de Marc

- Il ne reste plus qu'à compléter le nombre d'éléments de certains sous-ensembles avec les données non encore utilisées:
  de 46 qui mangent les poires, soustraire 8 + 16 + 15 pour obtenir les 7 élèves qui mangent des pommes, des poires, et pas de cerises
  de 120 qui mangent des pommes soustraire 12 + 15 + 7 pour obtenir les 86 élèves qui mangent des pommes, mais pas de poires et de cerises
- Répondre à la question après avoir calculé la somme nombres d'éléments des huit sous-ensembles
  7 + 15 + 12 + 16 + 86 + 17 + 8 + 60 = 221

Niveaux : 7, 8

Origine : Riva del Garda

16. LA 60^e DÉCIMALE (Cat. 8)

Jérôme effectue la division 1 : 23. Sachant que sur sa calculatrice il peut lire seulement les premiers chiffres qui sont placés à droite de la virgule, il décide d'effectuer le calcul à la main.

Quel est le 60^e chiffre décimal (écrit à droite de la virgule) dans la division de 1 par 23 ?

Expliquez comment vous avez fait pour le trouver.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Identifier une décimale donnée d'un nombre périodique à partir d'une division.

Analyse de la tâche

- Comprendre que la division du nombre 1 par 23 avec la calculatrice donne seulement les premiers chiffres significatifs du quotient décimal (par exemple 11 chiffres) : 0,04347826087 et que le 12^e chiffre (7) est un arrondi.
- Comprendre que puisque 23 n'est ni divisible par 2, ni par 5), la division donne un nombre décimal périodique, avec au maximum 22 chiffres dans la période car les restes possibles, 0 étant exclu, sont au maximum 22.
- Effectuer la division de façon à trouver les restes partiels. Vérifier sur la partie du quotient décimal pour laquelle c'est faisable que la succession des chiffres obtenus à la main et celle obtenue avec la calculatrice sont les mêmes. On trouve :

  0,0434782608695652173913

  avec la succession suivante des restes :

  1, 10, 8, 11, 18, 19, 6, 14, 2, 20, 16, 22, 13, 15, 12, 5, 4, 17, 9, 21, 3, 7 et de nouveau 1.
- Noter que le reste partiel est de nouveau 1 au 22^e rang à droite de la virgule (chiffre 3).

Ou, toujours en posant la division, pour éviter des erreurs, on peut s'aider de la calculatrice pour calculer les restes partiels :

reste	quotient	calcul des restes successifs	Ecriture décimale
1	0		0,0
10	4	$100 - 4 \times 23 = 8$	0,04
8	3	$80 - 3 \times 23 = 11$	0,043
11	4	$110 - 4 \times 23 = 18$	0.0434

Et continuer ainsi jusqu'à obtenir un reste identique à un reste déjà trouvé (1)

- Comprendre que la division « se poursuit à l'infini », et qu'il y a une période de 22 chiffres qui est

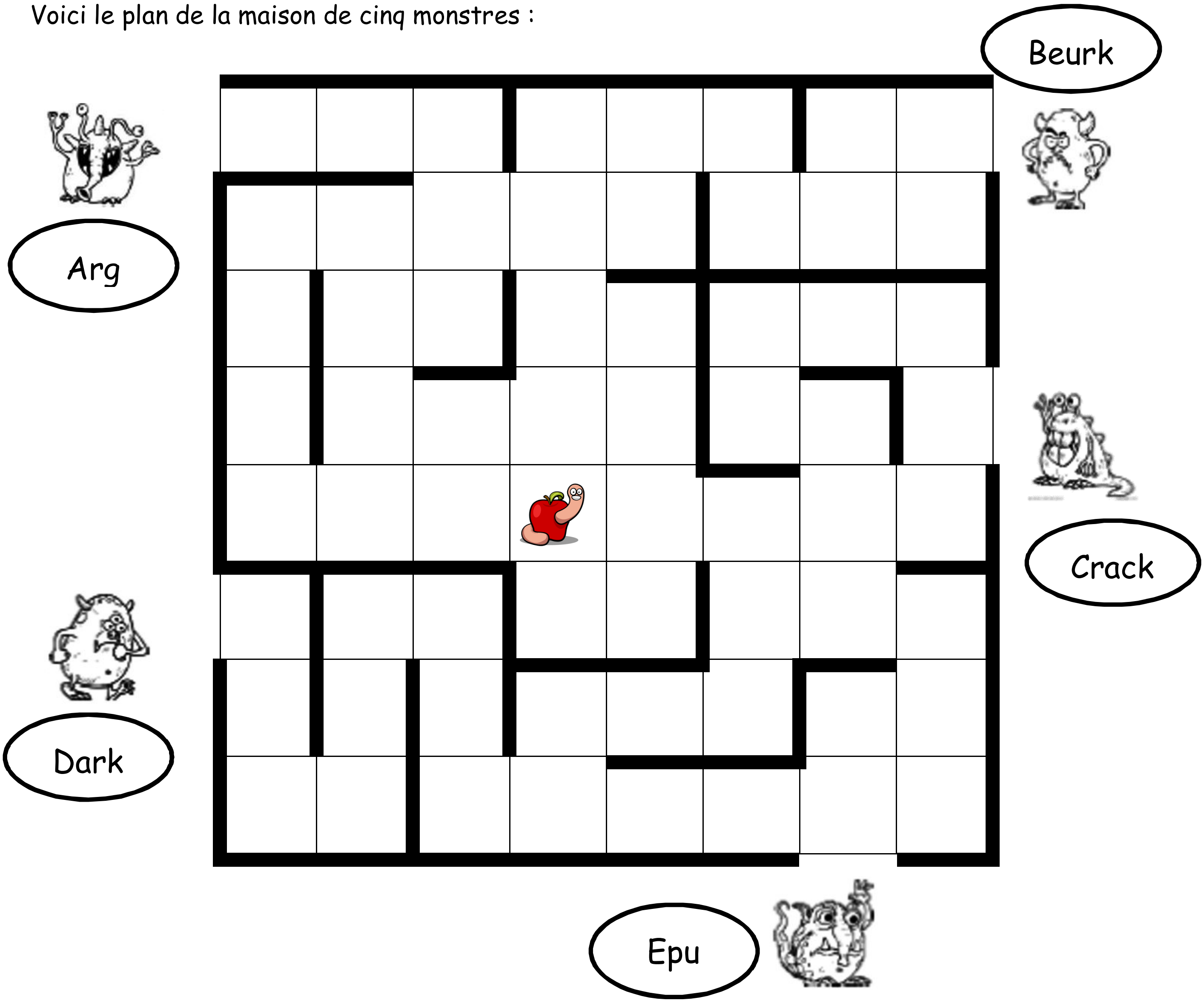
  0434782608695652173913.
- Constater que cette période commence au chiffre des dixièmes et que par conséquent le 1er chiffre écrit à droite de la virgule, le 23^e, le 45^e ... sont les mêmes, que le 2^e chiffre écrit à droite de la virgule, le 24^e, le 46^e, le 68^e ... sont les mêmes
- Déduire que le 60^e chiffre écrit à droite de la virgule sera le chiffre 2 (3 fois la période jusqu'au 66^e chiffre et reculer de 6 chiffres pour arriver au 60^e ; ou sachant que le reste de 60 : 22 est 16, le chiffre cherché est le 16^e chiffre de la période).

Niveaux : 8

Origine : Suisse Romande

17. LA COURSE DES MONSTRES (Cat. 8)

Voici le plan de la maison de cinq monstres :



Ces cinq monstres veulent manger la pomme.

Seul le premier à l'attraper pourra la dévorer.

Ils partent en même temps de là où ils sont.

Les monstres passent d'une case à l'autre par un côté, sans traverser les murs (les lignes épaisses) et prennent toujours le chemin le plus court.

Chacun d'eux court toujours à vitesse constante.

- Epu parcourt 3 carreaux quand Crack en parcourt 2.
- Beurk parcourt 3 carreaux quand Dark en parcourt 4.
- Arg parcourt 2 carreaux quand Beurk en parcourt 3.
- Dark parcourt 4 carreaux pendant que Crack en parcourt 1.

Quel monstre mangera la pomme ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Parmi des concurrents se déplaçant dans un labyrinthe organisé sur un quadrillage et partant de positions différentes en direction d'un même but, trouver le gagnant à partir d'informations relatives à des rapports de vitesses entre les concurrents.

Analyse de la tâche

Les conditions liées à la vitesse de chaque monstre sont numérotées de 1 à 4.

- Comprendre que les distances ont pour unité de mesure une case du quadrillage.
- Remarquer que les distances à parcourir par les monstres pour atteindre la pomme sont différentes.
- Comprendre qu'il faut tenir compte à la fois de la vitesse et de la distance pour résoudre ce problème : Ce n'est pas forcément ni le plus rapide ni le plus proche qui attrape la pomme.
- Repérer le chemin le plus court pour chaque monstre et relever la distance à parcourir en nombre de carreaux :

	Arg	Beurk	Crack	Dark	Epu
Nombre de carreaux à parcourir	8	11	6	17	9

- Comparer les parcours des monstres 2 à 2 dans le labyrinthe en s'appuyant sur chaque condition :
  - soit en utilisant un raisonnement numérique. Par exemple, en utilisant la condition 2 il faut plus de 3 bonds et moins de 4 bonds de 3 carreaux à Beurk pour atteindre la pomme, alors qu'il faut plus de 4 bonds de 4 carreaux à Dark. Beurk arrivera donc avant Dark ;
  - soit en déplaçant des pions sur les parcours. Par exemple, à chaque fois qu'on avance le pion sur le parcours de Beurk de 3 carreaux, on avance le pion sur le parcours de Dark de 4 carreaux. Constater que le pion de Beurk atteint ou dépasse la pomme avant celui de Dark.

  On trouve :

  D'après la condition 2, Beurk arrive avant Dark.

  D'après la condition 4, Dark arrive avant Crack, donc d'après la première déduction faite Beurk arrive avant Crack.

  D'après la condition 1, on constate qu'Epu et Crack arrivent en même temps donc Beurk arrive avant Epu.

  D'après la condition 3, Beurk arrive avant Arg : un moment dans leur parcours ils se retrouvent tous les deux sur le même carreau ; à ce moment il reste 2 carreaux à chacun pour arriver à la pomme mais comme Beurk court plus vite que Arg (d'après la condition 3) alors Beurk arrive avant lui.

  Finalement Beurk arrive avant tous les autres monstres. C'est lui qui mangera la pomme.

Niveaux : 8

Origine : Lyon