	Titre	**Catégories**	**Thème**	**Origine**
1.	Les hirondelles	3	opérations, addition (N)	UD
2.	L'escalier de la Tour Rouge	3 4	suites de nombres et période	SI
3.	Les chats	3 4	géométrie, pavage	GE
4.	Le ruban des nombres	3 4 5	numération	RZ
5.	Les cadres	3 4 5	géométrie, relation d'ordre	GE
6.	Hirondelles et colombes	4 5	opérations, addition (N)	UD
7.	Les bagues	4 5 6	combinatoire	SI
8.	Le ruban	5 6	mesures, partage	CB
9.	La décoration de Charles	5 6 7	géométrie et suite périodique	SI
10.	Extra-terrestres	5 6 7 8	déduction logique	SI
11.	La lecture d'Isidore	6 7 8	succession de fractions	BB
12.	Yvan le confiseur	6 7 8	empilement optimal de parall.rect.	G3D
13.	Grille de nombres	6 7 8	tables de multiplication	fj
14.	Le parquet	7 8	géométrie et mesures	SI
15.	Noël gourmand	7 8	proportionnalité	CB
16.	Toujours plus grands	8	géométrie et suite périodique	SI

1. LES HIRONDELLES (Cat 3)

Quand Laurent se réveille il voit que des hirondelles sont posées sur un fil électrique devant sa maison.

Il ouvre la fenêtre de sa chambre, 17 hirondelles s'envolent.

Un peu plus tard, 12 hirondelles viennent rejoindre celles qui sont restées sur le fil.

Placé derrière sa fenêtre, Laurent compte les hirondelles qui sont maintenant posées sur le fil électrique. Il y en a 36.

Combien y avait-il d'hirondelles sur le fil avant que Laurent ouvre la fenêtre ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver l'état initial dans une situation où l'état final (36) résulte d'une diminution (-17) suivie d'une augmentation (+12).

Analyse de la tâche

- Reconnaître l'ordre chronologique et les variations entre les états successifs d'une grandeur. Etat initial : ouverture de la fenêtre avec un nombre inconnu d'hirondelles - départ de 17 hirondelles (première variation) et état intermédiaire plus petit que l'état initial - arrivée de 12 hirondelles (deuxième variation) et état final, de 36, plus grand que l'état intermédiaire. Identifier l'inconnue : l'état initial.
- Traduire les variations par les opérations adaptées et effectuer les calculs correspondants ou opérer sur des dessins ou des objets en recourant au comptage :

  soit dans l'ordre chronologique, par essais successifs avec une hypothèse de départ (par exemple 20 – 17 + 12 = 15, « trop petit », ... pour aboutir à 41 – 17 + 12 = 36),

  soit en remontant dans le temps à partir de 36 en étant bien conscient qu'il s'agit d'utiliser les opérations réciproques des précédentes : 36 – 12 + 17 = 41.

  On peut aussi faire le bilan des deux variations : « diminution de 5 (17 – 12) par rapport à l'état initial ».

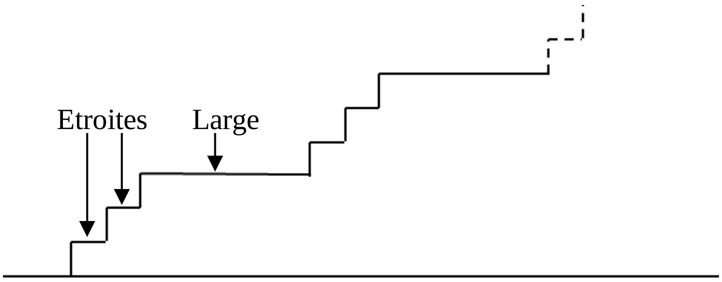
Niveau : 3

Origine : Udine

2. L'ESCALIER DE LA TOUR ROUGE (Cat. 3, 4)

Mathieu monte l'escalier qui conduit en haut de la Tour Rouge. Cet escalier commence par deux marches étroites, puis une large, puis deux étroites, puis une large, et ainsi de suite, très régulièrement. L'escalier se termine par une marche large.

Voici un dessin du début de l'escalier.



Une fois arrivé en haut de l'escalier, Mathieu annonce qu'il a compté 60 marches étroites dans l'escalier.

Combien l'escalier a-t-il de marches au total ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le nombre de termes d'une suite régulière périodique, dont la période, est de trois termes (« étroite, étroite, longue ») et se répète 30 fois.

Analyse de la tâche

- Décrypter le dessin : comprendre ce que l'on dénomme « marche », que les marches se répètent par groupes de trois : deux étroites et une large, que l'escalier continue selon la même règle de construction.
- (Continuer éventuellement le dessin dans les limites de la feuille, ou sur une autre feuille).
- Pour éviter de représenter la suite entière, on peut s'en tenir à une première partie et procéder par répétitions (par exemple se limiter à 10 groupes de 3 marches : 20 étroites et 10 larges à compter trois fois : 60 étroites et 30 larges)

Ou, dans une démarche générique, comprendre qu'en montant 60 marches étroites, Mathieu a monté 30 groupes de deux marches étroites avec à chaque fois une marche large, c'est-à-dire sur 30 groupes de trois marches ou sur 90 marches au total : 60 marches étroites et 30 larges.

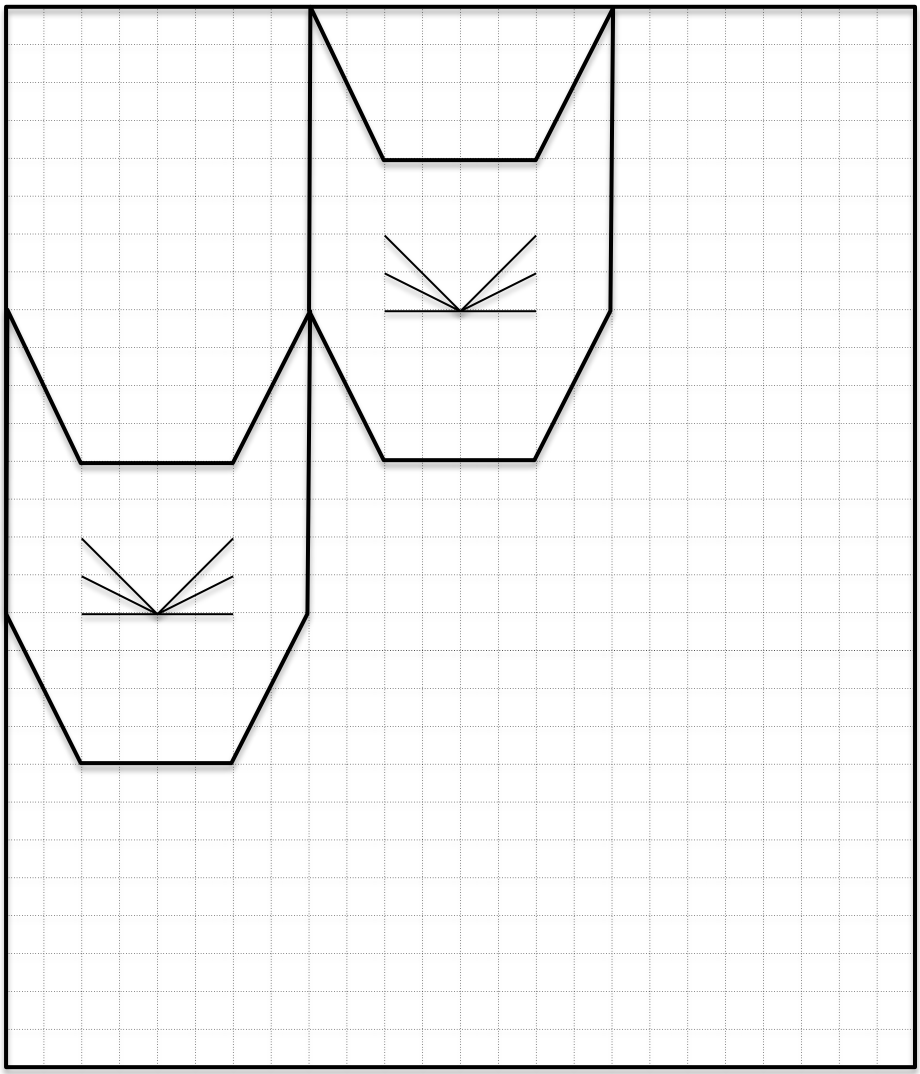
Ou inférer de quelques exemples que le nombre de marches larges est égal à la moitié du nombre de marches étroites (soit 30) et en déduire le nombre total de marches (60 + 30 = 90).

Niveaux: 3, 4

Origine: Siena

3. LES CHATS (Cat. 3, 4)

Hélène a déjà dessiné deux têtes de chats dans cette grille :



Hélène veut encore dessiner dans la grille le plus grand nombre possible d'autres têtes de chats, toutes identiques aux deux premières.

Lorsque la grille est pleine, Hélène colorie seulement les têtes complètes : certaines têtes en rouge, les autres en bleu.

Deux têtes qui se touchent par un ou plusieurs côtés ne doivent pas être de la même couleur.

Comme Hélène, dessinez, vous aussi, sur cette grille le plus grand nombre possible de têtes entières de chats et coloriez-les.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

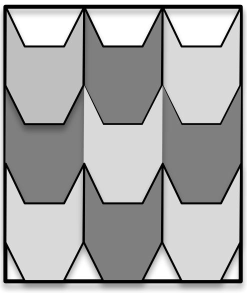
Paver une grille avec le plus grand nombre possible de figures égales à deux figures données et les colorier de deux couleurs, de manière que deux figures ayant un côté commun soient de couleurs différentes.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il s'agit de recouvrir la grille avec le plus grand nombre possible de têtes entières identiques aux deux premières.
- Pour paver la grille, les élèves peuvent compléter les têtes :

  de la première ligne en haut, la première colonne à gauche ou la colonne centrale et constater qu'ils peuvent y placer dans chaque cas 3 têtes exactement et obtenir 9 têtes en tout.

- Colorier en rouge et en bleu, de manière que deux têtes ayant un côté commun soient de couleurs différentes.

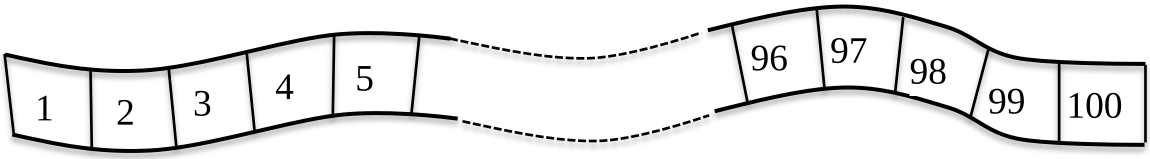


Niveaux: 3, 4

Origine: Genova

4. LE RUBAN DES NOMBRES (Cat. 3, 4, 5)

Luc et Richard ont trouvé un ruban des nombres de 1 à 100 :



Luc décide de colorier en rouge toutes les cases du ruban dont les nombres s'écrivent seulement avec les chiffres 0, 2, 4, 6, 8.
Richard décide de colorier en bleu toutes les cases du ruban dont les nombres s'écrivent seulement avec les chiffres 1, 3, 5, 7, 9.

Combien de cases Luc va-t-il colorier en rouge ?

Combien de cases Richard va-t-il colorier en bleu ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dénombrer parmi les nombres de 1 à 100 ceux qui s'écrivent seulement avec des chiffres « pairs » ou seulement avec des chiffres « impairs ».

Analyse de la tâche

- Considérer l'ensemble des nombres 1, 2, 3, ... , 97, 98, 99, 100, se rendre compte qu'il y en a bien 100, qu'ils sont tous écrits avec un, deux ou trois des dix chiffres 0, 1, 2, … 9, et qu'il faut distinguer les chiffres des nombres.
- Observer qu'il y a des nombres composés de un ou deux chiffres « pairs » ou de un ou deux chiffres « impairs» ou encore de chiffres « pair » et « impair » et un nombre composé de trois chiffres.
- Procéder au dénombrement pour répondre à la question posée, soit :

  - par l'écriture et/ou coloriage des cases des100 nombres (ou cases) et comptage un à un de chaque nombre de Luc et de Richard,

  - ou en n'écrivant que les nombres (ou cases) cherchés, regroupés ou non par dizaines, …

  et trouver que Luc a colorié en rouge les 24 nombres (2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 20 ; 22 ; 24 ; 26 ; … 80 ; 82 ; 84 ; 88) et Richard a colorié en bleu les 30 nombres (1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; … 91 ; 93 ; 95 ; 97 ; 99).
- En regroupant les nombres par dizaines on peut ramener le dénombrement un à un à des multiplications :

  4 × 5 et 5 × 5 auxquels il faut ajouter les nombres d'un seul chiffre: 4 pour Luc et 5 pour Richard.

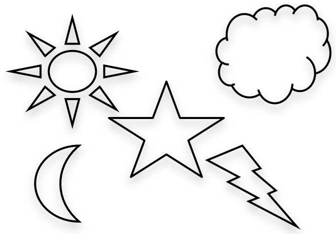
Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Rozzano

5. LES CADRES (Cat. 3, 4, 5)

Clara a accroché cinq cadres l'un à côté de l'autre sur le mur au-dessus de son lit.

Dans l'un il y a un soleil, dans un autre un nuage, dans un autre une lune, dans un autre un éclair et dans un autre encore, une étoile.

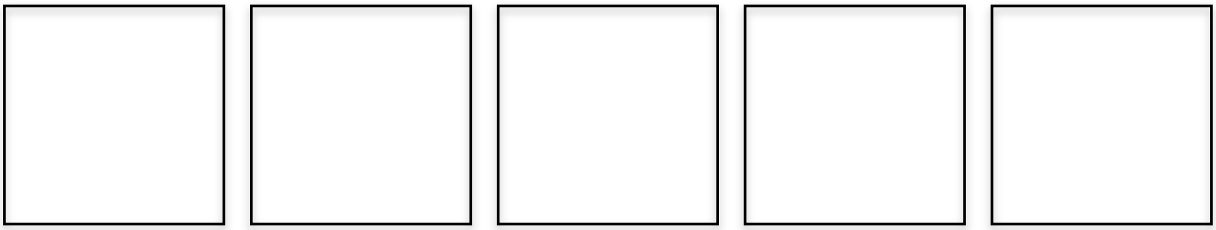


Lorsqu'elle regarde les cinq cadres, Clara voit que :

- la lune n'est pas à côté de l'étoile ni à côté du nuage ;
- il y a deux cadres entre celui du soleil et celui de l'étoile ;
- le nuage est à côté de l'étoile, à droite ;
- l'éclair est à côté de la lune.

Dessinez les images dans les cadres dans le bon ordre (ou écrivez le nom des images dans leur cadre).

Expliquez comment vous avez trouvé leur position.



ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Reconstituer un alignement de cinq objets selon des informations de voisinage et de positions relatives.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les cinq figures données doivent être disposées dans les cinq cadres en respectant une liste de contraintes.
- Lire les contraintes et se rendre compte qu'aucune d'entre elles, seule, ne permet de trouver la position d'une figure et qu'il sera nécessaire de tenir compte de plusieurs d'entre elles simultanément.
- Organiser la recherche, par essais et vérifications ou par une hypothèse et éliminations successives

  Par exemple, à partir de la deuxième consigne, il y a quatre configurations possibles du soleil et de l'étoile:

  soleil, … , … , étoile, … - étoile, … , … soleil, … - …, soleil, …, … étoile - …, étoile, … , …, soleil.

  La troisième consigne selon laquelle le nuage est à droite de l'étoile réduit les configurations possibles à trois :

  soleil, … , … étoile, nuage - étoile, nuage , … , soleil, … , - …, étoile, nuage , …, soleil.

  La première consigne sur la position de la lune exclut une autre configuration, il n'en reste que deux :

  soleil, … , … , étoile, nuage - étoile, nuage , … soleil, …

  La quatrième consigne sur l'éclair et la lune conduit à l'unique possibilité :

  soleil, lune, éclair, étoile, nuage.

Niveaux : 3, 4, 5,

Origine: Genova & 3RMR

6. HIRONDELLES ET COLOMBES (Cat. 4, 5)

Quand Laurent se réveille, il voit que des hirondelles et des colombes sont posées sur un fil électrique devant sa maison.

Il ouvre la fenêtre de sa chambre, 11 hirondelles et 6 colombes s'envolent.

Un peu plus tard, 7 hirondelles et 11 colombes viennent rejoindre les oiseaux qui sont restés sur le fil.

Laurent compte les oiseaux qui sont maintenant posés sur le fil électrique. Il y a 23 hirondelles et 13 colombes.

Combien y avait-il d'oiseaux sur le fil avant que Laurent ouvre la fenêtre ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver la somme de 2 nombres, chacun étant l'état initial dans une situation où l'état final résulte d'une diminution suivie d'une augmentation.

Analyse de la tâche

- Reconnaître l'ordre chronologique et les variations entre les états successifs de deux grandeurs. Etat initial : ouverture de la fenêtre avec un nombre inconnu d'hirondelles et de colombes - départ de 11 hirondelles et 6 colombes (première variation) et état intermédiaire plus petit que l'état initial - arrivée de 7 hirondelles et 11 colombes (deuxième variation) et état final, de 23 hirondelles et 13 colombes, plus grand que l'état intermédiaire. Identifier l'inconnue : l'état initial (nombre total d'hirondelles et de colombes).
- Comme c'est le nombre total d'oiseaux au départ qui est demandé, deux raisonnements sont possibles :

  le premier portant sur le nombre total d'oiseaux à chaque étape ;

  le deuxième sur le nombre de chaque catégorie d'oiseaux à chaque étape.
- Traduire les variations par les opérations adaptées et effectuer les calculs correspondants ou opérer sur des dessins ou des objets en recourant au comptage :

  soit dans l'ordre chronologique, par essais successifs avec une hypothèse de départ portant, soit sur le nombre total d'oiseaux (par exemple 20 – 17 + 18 = 21, « trop petit », ... pour aboutir à 35 – 17 + 18 = 36), soit d'une part sur le nombre d'hirondelles et d'autre part sur le nombre de colombes pour aboutir à 27 – 11 + 7 = 23 et 8 – 6 + 11 = 13 et terminer en totalisant le nombre de colombes et d'hirondelles : 27 + 8 = 35

  soit en remontant dans le temps à partir du nombre total d'hirondelles et de colombes 36 en étant bien conscient qu'il s'agit d'utiliser les opérations réciproques des précédentes : 36 – 18 + 17 = 35 ou séparément à partir du nombre d'hirondelles (23 – 7 + 11 = 27) et de colombes (13 – 11 + 6 = 8) et terminer en totalisant le nombre de colombes et d'hirondelles : 27 + 8 = 35

  on peut aussi faire le bilan des deux variations soit pour chaque catégorie d'oiseaux : « diminution de 4 (11 – 7) par rapport à l'état initial pour les hirondelles et augmentation de 5 (11 – 6) pour les colombes », soit pour l'ensemble des oiseaux : augmentation de 1 (18 – 17) par rapport à l'état initial.

Niveau : 4, 5

Origine: Udine

7. LES BAGUES (Cat. 4, 5, 6)

Line a reçu en cadeau trois bagues, une rouge, une verte et une jaune.
Elle décide de mettre chaque jour une bague à l'annulaire de sa main gauche et une autre à l'annulaire de sa main droite.
Elle décide aussi de faire chaque jour un choix différent.
Aujourd'hui, lundi, elle choisit la bague rouge pour la main gauche et la jaune pour la main droite.
Mardi elle fera un autre choix, mercredi encore un autre…

Mais un certain jour, Line s'aperçoit qu'elle ne peut plus faire un choix différent de ceux déjà faits.

Quel est ce jour ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Parmi trois objets dénombrer les dispositions ordonnées de deux d'entre eux, dans un contexte de trois bagues de couleurs différentes, une sur chaque main.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les différentes façons de porter les bagues dépendent soit de leur couleur soit de la main qui les porte.
- Se rappeler qu'à chaque choix de deux couleurs différentes pour les bagues correspondent deux façons différentes de les porter.
- Établir une stratégie qui permette de trouver systématiquement les dispositions pour ne pas perdre de solutions. Par exemple :

  VR (*vert main gauche rouge main droite*) ou bien RV (*rouge main gauche vert main droite*)

  VG ou GV

  GR ou RG ;

  et en déduire qu'il y a en tout 6 possibilités.
- Conclure que Line sera forcée de répéter une des combinaisons le dimanche.

Niveau: 4, 5, 6

Origine: Siena

8. LE RUBAN (Cat. 5, 6)

Anne-Lise coupe un ruban de 140 cm de longueur en quatre parties pour emballer des cadeaux.

- La première et la deuxième partie sont de même longueur,
- la troisième partie mesure 15 cm de plus que la deuxième,
- la quatrième partie mesure 10 cm de plus que la troisième.

Quelle est la longueur de chaque partie du ruban découpé ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Décomposer 140 en une somme de quatre termes dont deux sont égaux, un troisième vaut 15 de plus que les premiers et le quatrième 10 de plus que le troisième.

Analyse de la tâche

- Trier les informations de l’énoncé et retenir celles qui seront utiles pour répondre à la question : les relations entre les quatre parties et la longueur totale.
- Se rendre compte qu’il s’agit de compléter une addition dont seule la somme est connue (140), dont les quatre termes ne sont pas encore déterminés mais dont on connaît des relations entre certains d’entre eux.
- Imaginer les quatre nombres : deux égaux, l’un qui vaut 15 de plus et l’un qui vaut encore 10 de plus que le troisième ou 25 de plus que les deux premiers et chercher une manière de les déterminer. Par exemple :

  par essais, au hasard ou organisés ou en décomposant 140 en quatre nombres égaux et les compléments de 15 et 25 (ou 15 et 15 + 10 ou 40), pour déduire, par soustraction, que la somme des quatre nombres égaux est 100 puis, par division, que chacun d’eux est 25 ; puis calculer les autres nombres, (25, 25, 40 et 50), vérifier que leur somme est 140 et rédiger les explications, ou encore par une représentation graphique de quatre segments égaux et de leurs compléments de 15 et 25. Etc.
- Déterminer ainsi les quatre longueurs: 25, 25, 40 et 50, en cm.

Niveaux : 5, 6

Origine: Campobasso

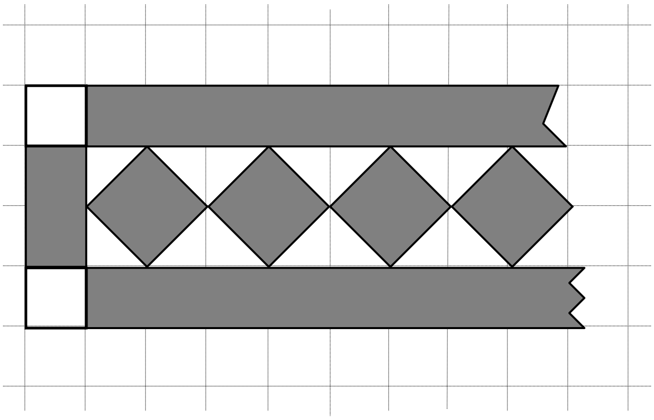
9. LA DECORATION DE CHARLES (Cat. 5, 6, 7)

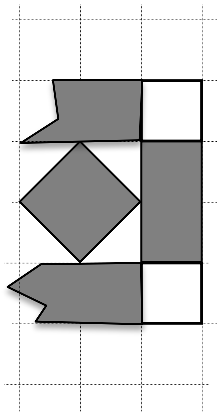
Charles peint une décoration sur une feuille de papier quadrillé.

Il commence par une bande verticale faite de deux carreaux laissés en blanc qui encadrent un rectangle de deux carreaux gris.

Il continue avec un motif qui est toujours le même : deux bandes horizontales grises qui bordent une file de carrés gris, alignés par leurs sommets. Les espaces entre les parties grises sont laissés en blanc.

Voici le début de la décoration, à gauche : et voici la fin, à droite :





La décoration se termine, à droite, par une bande verticale de quatre carreaux, identique à la bande, de gauche.

Sur la décoration entière, l'aire de la partie laissée en blanc est de 68 carreaux du quadrillage.

Quelle est l'aire de la partie de la décoration que Charles a coloriée en gris. (Prenez comme unité d'aire un carreau du quadrillage.)

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer l'aire de la partie grise d'u dessin d'une frise sur papier quadrillé, à partir d'une partie du dessin et de la donnée de l'aire totale de la partie blanche.

Analyse de la tâche

- Observer le dessin et éventuellement le poursuivre pour comprendre les règles de construction.
- Se rendre compte qu'on peut calculer facilement les aires blanches et grises des deux colonnes de gauche et de droite, que l'aire des carrés gris et celle des différents triangles blancs se déterminent par le découpage des unités du quadrillage, mais que la longueur des bandes horizontales ou le nombre des carrés gris n'est pas connu et empêche le calcul direct de leurs aires.
- Une première manière de « contourner l'obstacle » est de poursuivre le dessin jusqu'à obtenir les 64 carrés (par exemple, avec les 5 carrés des deux fragments dessinés, on n'arrive qu'à 14 carreaux blancs entiers, avec 10 carrés gris on arriverait à 24 carreaux blancs) et de s'arrêter à 32 carrés gris et de déterminer l'aire grise.
- Une procédure plus globale consiste à s'occuper de la partie entre les deux colonnes extérieures (composées de 4 carreaux blancs et 4 gris) pour ne retenir que les 64 carreaux blancs restants ; constater les répétitions de motifs verticaux comprenant un carré gris quatre petits triangle blancs et deux bandes dont on calcule facilement les aires respectives en unités du quadrillage: 2 blancs, 6 (2 + 2+ 2) gris ; en déduire qu'il y a 32 motifs répétés et calculer l'aire grise totale, par exemple (32 × 6) + (2 × 2) = 192 + 4 = 196.

Ou : toujours dans une procédure globale, constater l'égalité des aires grises et blanches (64 et 64) entre les deux bandes horizontales ce qui permet de trouver qu'il y a 32 carrés gris et de déterminer la longueur des deux bandes horizontales grises puis leur aire pour aboutir finalement à une calcul du genre: (2 × 64) + 64 + (2 × 2) = 196.

Il y a encore de très nombreuses manières d'organiser les parties de figures et les calculs correspondants.

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Siena

10. EXTRA-TERRESTRES (Cat. 5, 6, 7, 8)

Sur une lointaine planète vivent cinq créatures étranges : ET1, ET2, ET3, ET4 et ET5 qui se reconnaissent à trois caractéristiques :

- une antenne,
- une trompe,
- une queue.

Chacune des cinq créatures a au moins une des caractéristiques, certaines ont deux caractéristiques, aucune n'a les trois caractéristiques.

On sait que:

- ET2 a une antenne ;
- ET3 a une queue mais ET1 n'en a pas ;
- ET1 et ET5 n'ont pas de trompe ;
- les cinq créatures sont toutes différentes,
- au total on compte trois trompes, deux queues et trois antennes.

Indiquez quelles sont les caractéristiques (antenne, trompe, queue) de ET4.

Expliquez comment vous avez fait pour les trouver.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Reconstituer les caractéristiques de cinq créatures par déductions logiques à partir d'une série d'informations partielles sur la présence ou non de certaines de ces caractéristiques.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'on est dans une fiction, en accepter les contraintes, imaginer les cinq personnages et leurs caractéristiques et s'en représenter éventuellement quelques-uns.
- Comprendre qu'il faudra tenir compte de toutes les données, qu'il sera nécessaire d'organiser les choix des caractéristiques et qu'il faudra se souvenir des premiers essais pour respecter l'ensemble des conditions (par des tableaux, dessins, listes, …).

  Il y a de très nombreuses façons de répartir les caractéristiques selon les cinq personnages. Par exemple: *ET1 n'a pas de queue ni de trompe, on sait donc qu'il n'a que des antennes* ; ou *puisque ET1 et ET5 n'ont pas de trompe et qu'il y a trois trompes en tout, ET2, ET3 et ET4 en ont une*. La difficulté principale se situe au moment où ont été trouvées les premières répartitions indiquées et qu'il reste à répartir la deuxième queue et la troisième antenne. Elles ne peuvent être attribuées qu'à ET5 pour éviter que deux créatures aient les mêmes caractéristiques.

	ET1	ET2	ET3	ET4	ET5
3 trompes	-	1	1	1	-
2 queues	-	-	1	?	?
3 antennes	1	1	-	?	?

- Compléter une « configuration » des cinq créatures et de leurs attributs (tableau, liste, grille …) et conclure que: ET1 a seulement une antenne; ET2 a une antenne et une trompe; ET3 une trompe et une queue ; ET4 n'a qu'une trompe et ET5 a une queue et une antenne.
- Commencer par utiliser les informations (au moins une caractéristique, mais pas trois, ET2 a des antennes ; ET3 a une queue mais ET1 n'en a pas ; ET1 et ET5 n'ont pas de trompe, au total on compte trois trompes) ; ce qui permet de connaître toutes les caractéristiques de ET1, ET2 et ET3. Procéder par essais et contrôle pour la répartition des antennes et queues entre ET3 et ET4.

Niveaux : 5, 6, 7, 8

Origine : Siena

11. LA LECTURE D'ISIDORE (Cat. 6, 7, 8)

Lundi, Isidore commence la lecture d'un nouveau livre et il lit la moitié des pages de ce livre.
Mardi, il lit la moitié des pages qu'il n'a pas lues le lundi.
Mercredi, il lit la moitié des pages qu'il n'a pas lues le lundi et le mardi.
A ce moment, il a déjà lu 84 pages du livre.

Combien de pages Isidore doit-il encore lire pour terminer son livre ?
Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Trouver la différence entre un nombre et la somme, qui est donnée, (84), de sa moitié, son quart et son huitième.

Analyse de la tâche

- Distinguer dans le temps les trois états de la lecture : la moitié le lundi, ajouté à la moitié du reste le mardi, ajouté enfin à la moitié du nouveau reste le mercredi.
- Traduire ces états successifs en parties lues et non lues à l'aide des fractions données et de 84 qui est la somme des parties lues (jour après jour, il y a 1 partie sur 2 ; 3 parties sur 4 ; 7 parties sur 8 qui correspondant à 84).
- Dans une résolution par essais, au hasard ou organisés, à partir d'un nombre de pages hypothétique, déterminer successivement les trois moitiés successives dont la somme est 84. Retenir ce nombre et calculer son écart à 84 pour trouver les pages à lire.
- Dans une résolution déductive ou « en compréhension » (avec un nombre quelconque provisoirement inconnu), trouver que le lundi il a lu la moitié des pages ; le mardi la moitié et la moitié du reste c'est-à-dire la moitié et un quart ou les trois quarts ; le mercredi soir, il a lu sept huitièmes des pages (1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8) et que donc 7/8 des pages représentent 84 pages. En déduire que 1/8 des pages représente 12 pages (84 : 7 = 12) et qu'il s'agit des pages à lire encore, ou que 8/8 des pages représentent 96 pages (12 × 8 = 96). Cette procédure exige une maîtrise des fractions, de leur addition, de leur décomposition et des fractions de fractions. Elle peut être illustrée par une représentation graphique de la succession des « moitiés ». (Par exemple au moyen de segments, rectangles, … utilisant le schéma pour déterminer combien de fois le reste est contenu dans le tout (8 fois). En déduire que 7 fois le reste correspond à 84 pages et donc que le reste est 12.)
- Dans une résolution algébrique, désigner par x le nombre de pages du livre et traduire le problème par l'équation $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)\right]=84$ qui a pour solution 96. Enfin, calculer 96 - 84 = 12 qui est le nombre de pages restant à lire.

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Bourg en Bresse

12. YVAN, LE CONFISEUR (Cat. 6, 7, 8)

Yvan range les bonbons qu'il fabrique dans des boîtes en forme de parallélépipèdes rectangles, de dimensions extérieures: 8 cm, 3 cm et 5 cm.

Il place ensuite ces boîtes dans des cartons, aussi en forme de parallélépipèdes rectangles, de dimensions intérieures 60 cm, 60 cm et 5 cm, avant de les expédier.

Combien de boîtes de bonbons peut-il placer au maximum dans chaque carton ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre solution.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le nombre maximum de parallélépipèdes rectangles de dimensions extérieures 8, 3 et 5 (cm) qu'on peut disposer dans un parallélépipède rectangle de dimensions intérieures, 60, 60 et 5 (cm).

Analyse de la tâche

- Imaginer la tâche de remplissage de la grande boîte par des petites de manière à en mettre le plus possible ou de laisser le moins d'espaces vides. Un éventuel calcul du rapport des deux volumes permet de savoir que le « maximum théorique » est 150 = 18000/120 (ou 3600/24 après simplification par 5) petites boîtes dans la grande, afin d'évaluer les futures réponses successives trouvées.
- Se rendre compte que les petites boîtes peuvent être disposées avec 8 cm, 5 cm ou 3 cm en hauteur sur le fond de la grande boîte 60 × 60; que la première disposition n'est pas possible car elles dépasseraient de la grande boîte, que la disposition avec 3 cm en hauteur laisserait des vides de 2 cm qu'on ne pourrait plus combler et qu'il faudra adopter la disposition 5 cm en hauteur pour une utilisation optimale de l'espace. Le problème se réduit alors à trouver une disposition optimale des faces rectangulaires de 3 × 8 dans le « fond » carré de la grande boîte 60 × 60.
- Disposer 20 rectangles de largeur 3 les uns à côté des autres, pour obtenir un rectangle de 60 × 8, puis le reproduire sept fois et occuper un rectangle de 56 × 60 (*figure 1*).* On place ainsi 140 boîtes et il reste un espace libre de 4 × 60, dans lequel on peut encore placer 7 boîtes (après rotation d'un quart de tour) (*figure 2*).* L'espace libre est alors constitué d'une bande de 1 × 56 et d'un carré de 4× 4, c'est-à-dire 72 cm^2 du fond.
- Le reste de 72 cm^2 inutilisable, correspondant à la surface de 3 rectangles de 8 × 3, ou 3 boîtes, doit inciter à la recherche d'une meilleure disposition et à se demander si on ne peut pas éliminer la bande de 1 × 56.
- Une solution consiste à ne placer que 6 files de 20 rectangles (*figure 3*)* pour occuper un rectangle de 48 × 60 (au lieu de 56 × 60) avec un rectangle de 12 × 60 (12 est un multiple de 3) encore à disposition, dans lequel on peut placer 7 blocs de 4 rectangles (après rotation d'un quart de tour) les uns à côté des autres (*figure 4*)*. On a ainsi placé 6 × 20 + 7 × 4 = 148 rectangles. Il n'y a plus de bande inoccupée et il reste à disposition un rectangle de 4 × 12 dans lequel on peut encore placer une 149^e^ boîte, avec une partie inoccupée de 24 cm^2 du fond, mais constituée d'une bande de 1 × 12 et d'un rectangle de 3 × 4 dans lequel on ne peut pas placer une 150^e^ boîte (*figure 5*).*
- Il reste à se convaincre qu'il n'y a pas de meilleure disposition, mais on ne dispose pas de démonstration.

** les figures sont à la page suivante*

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Groupe Géométrie 3D

figure 1 (140)

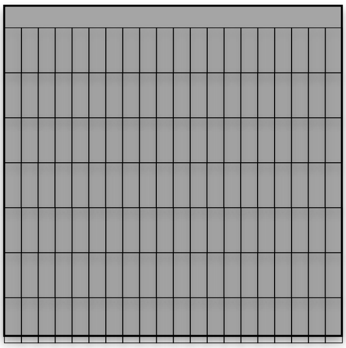
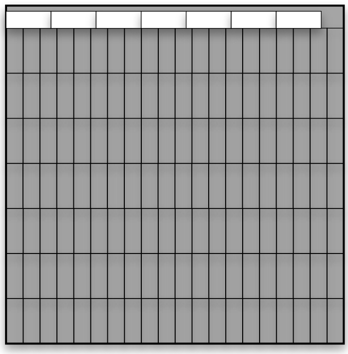


figure 2 (147)



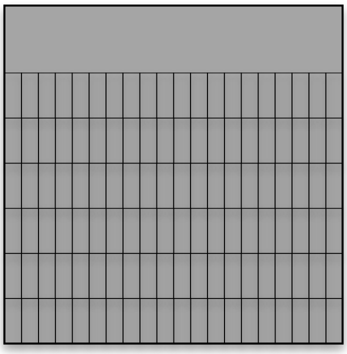


figure 3 (120)

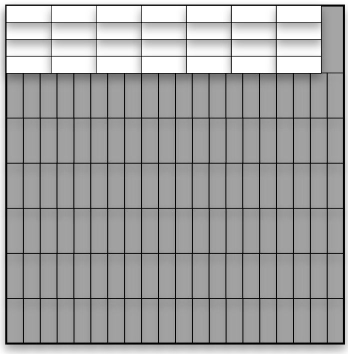


figure 4 (148)

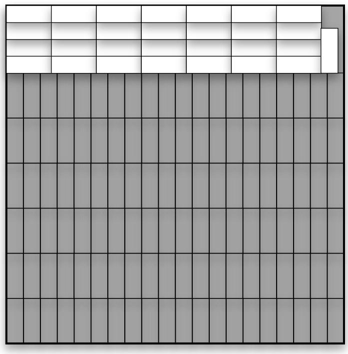


figure 5 (149)

13. GRILLE DE NOMBRES (Cat 6, 7, 8)

En explorant un château abandonné, Zoé et ses amis ont trouvé le dessin d'une grille occupant entièrement un mur d'un ancien cachot.

L'humidité et les années ont effacé une grande partie des nombres écrits dans les cases de cette grille, mais ceux qui restent montrent que le prisonnier qui a dessiné la grille suivait des règles bien précises pour passer d'un nombre au suivant, dans chaque ligne et dans chaque colonne.

Zoé a pris deux photos des parties A et B du mur comme sur cette figure :

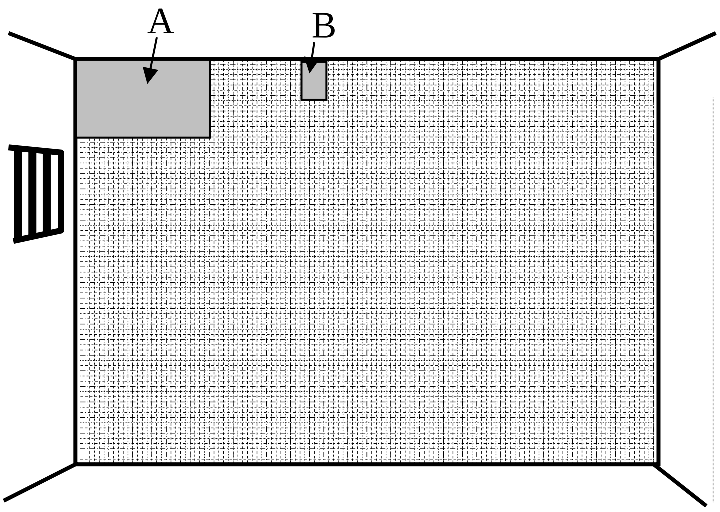


***Photo A** : le haut du mur à gauche, les cinq premières lignes et les onze premières colonnes*

1	2	3			6				10	11
			8	10	12				20	22
3	6	9	12					27	30	33
		12	16	20			32	36	40	
	10			25	30	35	40			55

***Photo B** : six cases*
Avec 111 sur la 3e ligne

	111

Puis elle a encore pris trois autres photos, d'autres parties du mur:

Photo C

187	198
204	

Photo D

209				285

Photo E

110			
			192

Écrivez les nombres qui manquent dans les quatre photos *B, C, D* et *E*.

Expliquez comment vous avez fait pour les trouver.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Compléter des fragments d'une table de multiplication en se référant aux suites de multiples de chaque ligne et de chaque colonne.

Analyse de la tâche

- Constater, d'après la photo A, que la grille de nombres est constituée de suites aux « régularités déjà rencontrées » dans les lignes et les colonnes et percevoir qu'il s'agit de la « table de multiplication »*, dont chaque ligne et chaque colonne sont constituées des multiples du premier nombre (à gauche, respectivement, en haut).
- Pour la photo B, se rendre compte que 111, sur la troisième ligne est le troisième multiple de 37 ($3 \times ? = 111$ ou $111 : 3 = 37$) et que la colonne précédente est celle des multiples de 36.
- Pour la photo C, $198 – 187 = 11$ et $204 – 187 = 17$, déterminent la 11e ligne et la 17e colonne.
- Pour la photo D, 209 et 285 sont des multiples d'un même nombre, leur différence $285 – 209 = 76$ vaut quatre fois ce nombre : 19 (76 : 4). Les deux nombres se situent donc sur la 19e ligne. $209 = 19 \times 11$ se situe dans la 11e colonne, $285 = 19 \times 15$ se situe dans la 15e colonne.
- Pour la photo E, on peut par exemple considérer les diviseurs de 110 (1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 11 ; 22 ; 55 ; 110) et savoir que ce nombre peut se trouver dans les lignes ou colonnes 1 et 110, 2 et 55, 5 et 22 ou 10 et 11 puis après quelques essais trouver 5 pour la colonne et 22 pour la ligne qui correspondent à la colonne 8 et à la ligne 24 pour 192.

  Une autre manière est de chercher aussi les diviseurs de 192 (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 32 ; 48 ; 64 ; 96 ; 192) et de trouver des couples qui diffèrent de 2 (pour les lignes) : 22 et 24 et de 3 (pour les colonnes) : 5 et 8.

  Remplir ensuite les quatre tableaux :

36	37
72	74
108	111

B

187	198
204	216
221	234

C

198	216	234	252	270
209	228	247	266	285

D

110	132	154	176
115	138	161	184
120	144	168	192

E

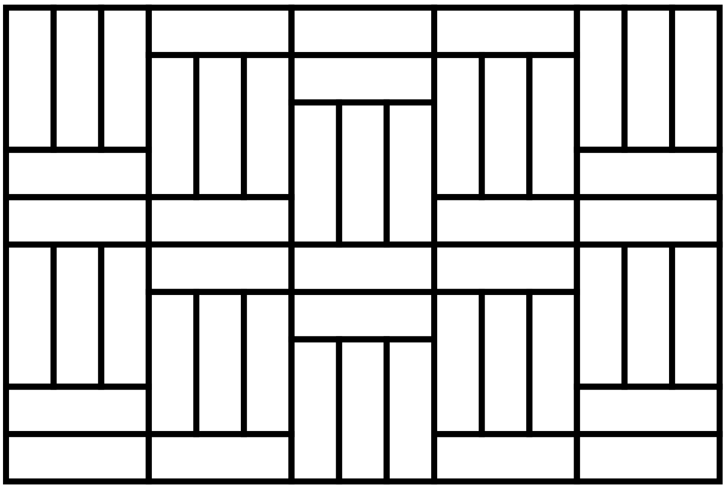
Niveaux: 6, 7, 8

Origine: fj

** Il y a ici une très légère entorse à la rigueur mathématique car on pourrait théoriquement trouver d'autres fonctions que celles de la table de multiplication, correspondant aux nombres donnés dans la grille, mais très difficiles à définir.*

14. LE PARQUET (Cat. 7, 8)

Voici l'image du parquet d'une pièce rectangulaire fait de lames toutes identiques.



Le périmètre de la pièce est de 15 m. Les lames coûtent 30 euros par mètre carré.

Quel est le prix total des lames qu'il a fallu utiliser pour réaliser ce parquet ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Le dessin d'un parquet rectangulaire fait de lames rectangulaires toutes identiques étant donné, ainsi que son périmètre, calculer le prix de l'ensemble des lames du parquet connaissant le prix des lames au mètre carré.

Analyse de la tâche

- Observer la figure et percevoir ses régularités, déduites de l'isométrie des rectangles qui composent le pavage : la longueur des lames est le triple de leur largeur ; c'est la « relation clé » de la situation qui suggère de prendre la largeur d'une lame comme unité ou d'imaginer une trame carrée (quadrillage) sur laquelle est construit le pavage, chaque rectangle recouvrant 3 carrés unités de la trame.
- Dans cette perception de la trame ou de la largeur d'une lame comme unité, les dimensions de la pièce sont 10 et 15 en côtés de carrés-unités, le périmètre est 50 = (10 + 15) × 2 dans cette unité.
- Par proportionnalité : 50 (unités) ⇔ 15 (en m) détermine le rapport 15/50 ou 3/10 ou 0,3 et permet de déduire les dimensions de la pièce : 3 et 4,5 (en m).
- Passer ensuite à l'aire du parquet : 3 × 4,5 = 13,5 (en m^2) et au prix des lames qui est 13,5 × 30 = 405 (en euro).

Ou, par une procédure algébrique, exprimer les dimensions par des lettres (par exemple x et y pour la largeur et la longueur des lames, puis substituer y par $3x$ pour aboutir à l'équation : $2(15x + 10x) = 15$ puis $50x = 15$).

Ou mesurer les dimensions sur un plan, celui de l'énoncé ou un autre réalisé en respectant les rapports, calculer le périmètre de la pièce sur le plan, en déduire l'échelle et déterminer par proportionnalité les dimensions réelles de la pièce, puis calculer le prix du parquet.

Ou procéder par essais.

Niveaux : 7, 8

Origine: Siena

15. NOËL GOURMAND (Cat. 7, 8)

Pour la période des fêtes de Noël, une fabrique de pâtisseries reçoit une commande pour une livraison de 16 500 panettones. Dans les deux premiers jours de travail, les 8 machines de l'usine ont produit 1500 panettones.

Craignant de ne pas pouvoir respecter la date de livraison, le propriétaire décide d'emprunter 12 machines supplémentaires, identiques aux siennes, et de les faire travailler toutes ensemble.

Combien de jours seront encore nécessaires pour terminer le travail ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Calculer le temps nécessaire à un nombre donné de machines pour terminer une production d'un certain nombre d'objets, connaissant le temps mis par un plus petit nombre de machines pour produire une partie des objets.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le nombre de jours requis dépend à la fois du nombre de machines et du nombre de panettones à produire ; dans ce cas, combien de jours sont nécessaires à 20 machines pour produire les 15000 qui manquent.
- Calculer combien de panettones produit chaque machine en un jour, avec l'opération 1500 : 8 : 2 = 93,75; 20 machines qui marchent ensemble produisent 93,75 × 20 = 1875 panettones par jour et donc, pour produire les 15000 panettones qui manquent il faut 15000 : 1875 = 8 (jours).

  (Il n'est cependant pas nécessaire de revenir à l'unité. Une production de 750 panettones avec 8 machines par jour donne les 1875 gâteaux avec 20 machines par jour.)

Ou: observer que 15000 est 10 fois 1500 et donc que, si 8 machines en 2 jours produisent 1500 panettones, 80 machines, en 2 jours, en produisent 15000 ; 20 machines (20 = 80 : 4) utiliseront alors 2 × 4 = 8 (jours).

Ou: faire recours explicitement à la proportionnalité ; par exemple, en fixant le nombre de machines et en indiquant par y le nombre de jours, on a la proportion :

1500 : 15000 = 2 : y d'où y = 3000 : 150 = 20 (jours) ;

puis, en maintenant constant le nombre de panettones et indiquant par x le temps en jours, on a la proportion suivante : 20 : 8 = 20 : x d'où x = 160 : 20 = 8 (jours).

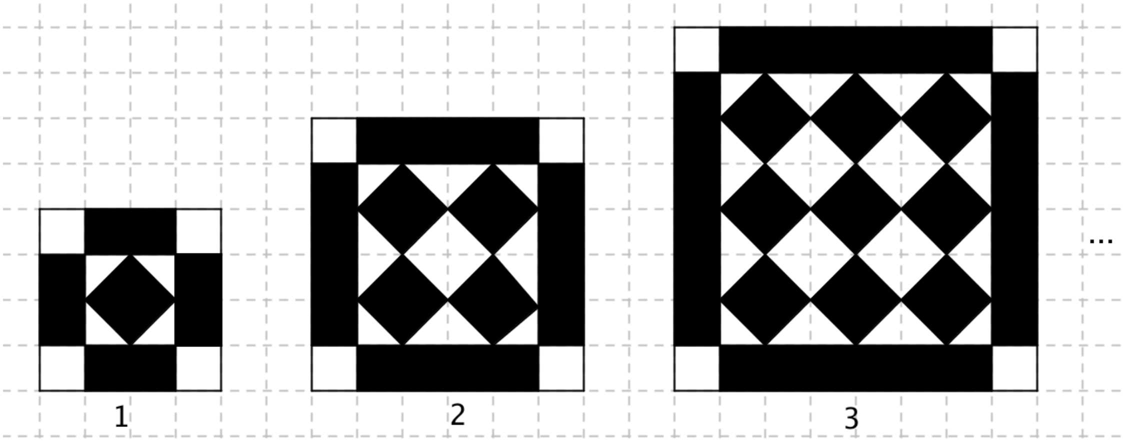
Ou, par tranches de deux jours: le 1e et le 2e : 1500 panettones avec 8 machines; le 3e et le 4e: 1500 + 1500 + 750 = 3750 panettones avec 12 + 8 = 8 + 8 + 4 machines; après les 5e et 6e, puis les ; 7e et 8e jours on arrive à 12750 et il manque encore 3750 (=16500-12750) produits en deux jours. Total : 10 jours, il reste encore 8 jours.

Niveaux: 7, 8

Origine: Campobasso

16. TOUJOURS PLUS GRANDS (Cat. 8)

Le dessin ci-dessous représente les trois premières figures, de rangs 1, 2, 3, d'une suite régulière dessinées sur papier quadrillé. Leur « cadre extérieur » a toujours la même épaisseur, l'intérieur est formé de carrés noirs alignés, dont le nombre de colonnes et de lignes augmente de 1 d'une figure à la suivante.



Pour une des figures de cette suite régulière, si on fait la différence entre l'aire des parties noires et l'aire des parties blanches, on trouve 196 (carrés du quadrillage).

Quel est le rang de cette figure ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Une suite de figures régulières dessinées sur quadrillage, colorées en noir et en blanc, est donnée par ses trois premiers éléments. Déterminer le rang de la figure dont la différence des aires blanches et noires est 196.

Analyse de la tâche

- Observer les trois figures et en déterminer les caractéristiques, variables et constantes et imaginer ou dessiner une quatrième ou cinquième figure éventuellement.

  Parmi les caractéristiques constantes on peut relever les quatre carrés blancs des angles extérieurs, la largeur des rectangles extérieurs, la structure en damier, … Parmi les caractéristiques variables : le côté du damier (rang des figures : 1, 2, 3), le côté extérieur (4, 6, 8, 10, …) le nombre de carré noirs : 1, 4, 9, 16 …
- Passer à l'inventaire des aires blanches et noires figure par figure ou, plus simplement, passer directement à la différence des aires, qui est due seulement aux bordures noires extérieures dès qu'on a remarqué que les parties blanches et noires du damier sont équivalentes.

  On arrive ainsi à la suite numérique des différences des aires noire - blanche :

  $4 \times 2 - 4 = 4$; $4 \times 4 - 4 = 12$; $4 \times 6 - 4 = 20$; $4 \times 8 - 4 = 28$; …

  qui conduit à la progression arithmétique de raison 8 : 4 ; 12 ; 20 ; … ;100 ; … ; 180 ; 188 ; **196 ;**

  dont il reste à déterminer le rang, **25.**

  Cette tâche assez délicate peut se faire par le comptage des termes de la progression lorsque ceux-ci sont tous écrits ou par des relations du genre $4 + 24 \times 8 = 196$ qui peuvent aboutir à l'erreur 24 si on oublie de compter le premier terme.

  Il y a évidemment de très nombreuses autres manières d'arriver au calcul des aires, de leur différence et à la détermination du rang, par listes, tableaux, inventaires, ou autres constatations … jusqu'au passage à l'algèbre (colonne « n » ci-dessous) et à l'équation $8n - 4 = 196$ qui conduit à $n = (196 + 4)/8 = 25$.

Rang	1	2	3	4	n
Aire blanche B	6	12	22	36	$2n^2 + 4$
Aire noire N	10	24	42	64	$2n^2 + 8n$
Aire totale B + N	16	36	64	100	$(2n + 2)^2$
Différence N – B	4	12	20	28	$8n - 4$

Niveaux: 8

Origine: Siena