Les problèmes de l'épreuve I du 21 RMT

	Titre	Catégories	Ar	Alg	Geo	Lo/Co*	Origine
1.	**Gourmandises**	3 4	x		x		GP
2.	**Bien cachés**	3 4			x		BB
3.	**Pyramides de briques (I)**	3 4 5	x				RZ
4.	**Le sentier dans le parc**	3 4 5	x				GE
5.	**Vacances d'hiver**	3 4 5				x	SI
6.	**Dîner aux chandelles (I)**	4 5 6	x				SI
7.	**Parties de billes**	5 6	x				fj
8.	**L'anniversaire**	5 6 7	x				fj
9.	**Une excursion à la mer**	5 6 7	x	x			UD
10.	**Éclairs au chocolat**	6 7 8	x	x			SI
11.	**Des triangles, oui, mais combien?**	6 7 8			x	x	BB
12.	**Pyramides de briques (II)**	6 7 8 9 10	x	x			RZ
13.	**Le parterre de tulipes**	7 8 9 10	x				LO
14.	**Bâtonnets et triangles**	7 8 9 10		x		x	PU
15.	**Date de naissance**	8 9 10	x	x			LU
16.	**Dîner aux chandelles (II)**	8 9 10	x	x			SI
17.	**Concert de printemps**	9 10	x	x			SI
18.	**Alignez-vous par trois**	9 10			x		BB

*

Ar : arithmétique

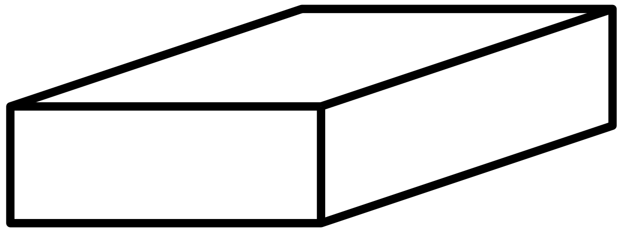
Alg : algèbre

Geo : géométrie

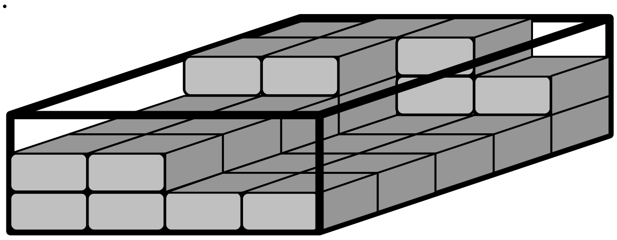
Lo/Co : logique et combinatoire

1. GOURMANDISES (Cat. 3, 4)

Maman a acheté une boîte de chocolats et l'a posée sur la table.
Voici la boîte, pleine mais encore fermée, avec son couvercle :



Le lendemain matin, quand elle ouvre la boîte, elle découvre que ses enfants ont déjà mangé une partie des chocolats.
Voici ce qui reste :



Combien de chocolats y avait-il dans la boîte quand elle était pleine ?

Combien de chocolats les enfants ont-ils déjà mangés ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Géométrie dans l'espace : représentation en perspective d'un empilement de pavés
- Arithmétique : comptage, addition, soustraction, multiplication

Analyse de la tâche

- Lire la représentation en perspective (comme une photo) : comprendre que tous les chocolats présents dans la boîte ne sont pas visibles sur la représentation, percevoir les couches, les empilements, …
- Comprendre que la boîte pleine comporte 3 étages de 4 rangées de 5 chocolats ou de 5 rangées de 4 chocolats, c'est-à-dire $5 \times 4 \times 3 = 60$.
- Déterminer le nombre de chocolats qui restent dans la boîte (par exemple couche par couche : 20 + 12 + 5 = 37), effectuer la différence (60 – 37 = 23) pour trouver les chocolats déjà mangés.

Ou : déterminer visuellement le nombre de chocolats manquants, parties par parties, et les additionner (par exemple 6 sur la partie supérieure « à gauche » 2 couches de 8 chocolats chacune. le chocolat en haut à droite 6 + 16 + 1=23)

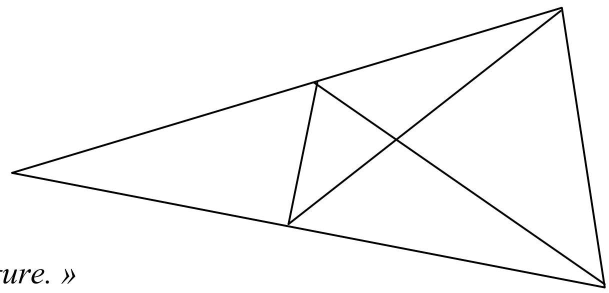
Ou : résolution à l'aide de matériel (cubes), ou autres représentations, …

Niveau: 3, 4

Origine: 5.I.3. *La boîte de sucre* complété par GP

2. BIEN CACHES (Cat. 3, 4)

André et Danièle observent cette figure :



André dit : « *Je vois 5 triangles dans cette figure.* »
Danièle lui répond : « *Moi, j'en vois beaucoup plus que ça !* »

Combien peut-on voir, en tout, de triangles différents dans cette figure ?

Indiquez clairement tous les triangles que vous avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

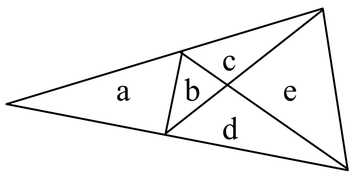
- Géométrie : visualisation, reconnaissance et comptage de triangles dans une figure

Analyse de la tâche

- Après avoir observé que la figure se décompose en 5 triangles distincts (pavage de cinq « pavés »), prendre en compte la remarque de Danièle et se demander comment elle en voit d'autres. Observer alors qu'il est possible de voir apparaître des triangles « plus grands », formés de deux, trois … pavés de base.
- Trouver alors quatre nouveaux triangles formés de deux pavés, deux triangles formés de trois pavés et le triangle complet (Au total, 12 = 5 + 4 + 2 + 1).

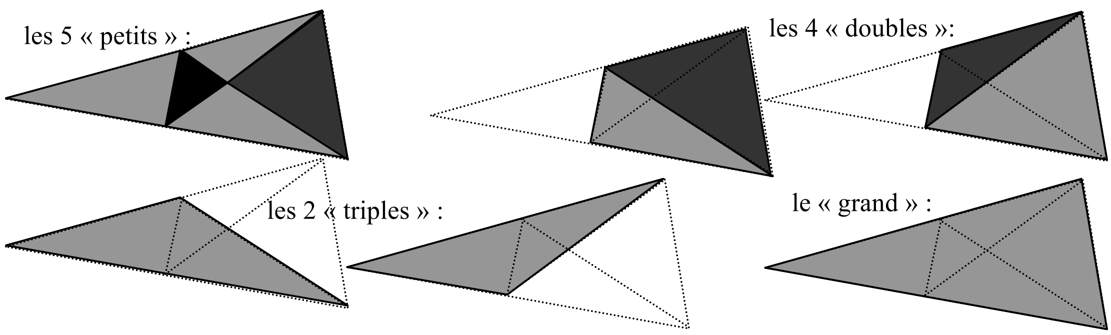
  (Si l'on n'envisage pas les triangles comme des pavés ou des « surfaces », l'inventaire peut s'établir à partir des sommets ou à partir des segments de la figure, pris trois par trois.)
- La deuxième tâche consiste à « indiquer clairement » les 12 triangles trouvés, en évitant les doublons et sans oublis :

  soit en désignant les cinq triangles de base par une lettre (a, b, c, d, e) ou un numéro ou une couleur,



  puis en nommant les 12 triangles : a, b, c, d, e, bc, bd, ce, de, abc, abd, abcde ;

  soit par des dessins de couleur, en pensant à dessiner plusieurs figures pour que l'inventaire soit « lisible » (l'utilisation de 12 couleurs sur la même figure rend l'inventaire presque « illisible ») :



  soit en désignant chaque triangle par ses trois sommets, ou par ses trois côtés (indiqués sur la figure) ;

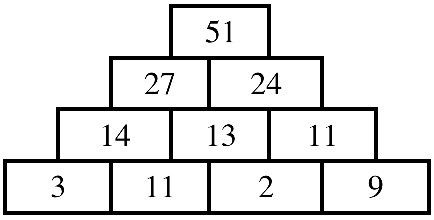
  soit par un inventaire regroupant les triangles selon leurs positions sur la figure, ou à partir de sommets ou côtés communs, …

Niveau : 3, 4

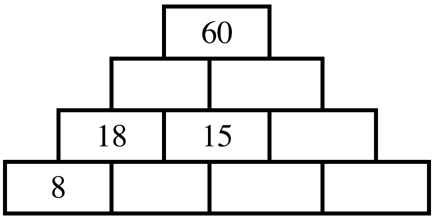
Origine : Bourg-en-Bresse et problèmes du RMT sur les triangles à identifier (7F12, 13.I.5, 16.I.4, 16.I.14, …)

3. PYRAMIDES DE BRIQUES (I) (Cat. 3, 4, 5)

Dans ces pyramides, on écrit un nombre sur chaque brique, selon la règle suivante :
Pour chaque brique qui repose sur deux autres, le nombre écrit est la somme des nombres des deux briques sur lesquelles elle est posée.
Par exemple : 14 est le nombre de la brique posée sur les briques 3 et 11 car 14 = 3 + 11,
51, le nombre de la brique du haut, est la somme de 27 et 24.



Écrivez les nombres qui manquent pour compléter la pyramide ci-dessous, avec la même règle :



Notez tous les calculs que vous avez faits pour trouver les nombres manquants.

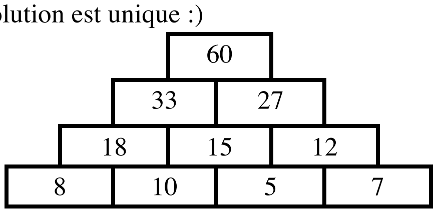
ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique: additions et soustractions de nombres naturels

Analyse de la tâche

- Comprendre le fonctionnement de la pyramide.
- Trouver les deux nombres qui peuvent être complétés en utilisant directement les nombres présents dans la pyramide : pour 10 par une soustraction (18 – 8 = 10) ou par une addition lacunaire (8 + ? = 18) ; pour 33 par une addition (18 + 15 = 33).
- Continuer de la même façon pour les quatre autres briques, par une suite d'additions lacunaires ou de soustractions : par exemple : 27 = 60 – 33; 10 + ? = 15 ; 15 + ? = 27, 12 – 5 = 7. (Pour les premières étapes, on a le choix entre deux briques à compléter, mais la solution est unique :)



Niveau: 3, 4, 5
Origine: Rozzano

4. LE CHEMIN DANS LE PARC (Cat. 3, 4, 5)

Catherine joue dans le parc en se déplaçant sur un long chemin fait de dalles placées les unes à la suite des autres.
Pour savoir quel déplacement elle va faire, elle lance un jeton qui a une face verte et une face rouge.
Si c'est la face verte qui apparaît lorsque le jeton est tombé, Catherine avance de 4 dalles.
Si c'est la face rouge, elle recule de 2 dalles.
Au début du jeu, Catherine était sur la treizième dalle. A la fin du jeu, elle est sur la vingt-et-unième dalle.
Catherine a vu apparaître la face verte cinq fois.

Combien de fois la face rouge est-elle apparue ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : les quatre opérations

Analyse de la tâche

- Comprendre que les déplacements se décident à « pile ou face », correspondant chacun à l'un des deux déplacements possibles sur la suite des dalles ; que Catherine s'est déplacée globalement de la 13e à la 21e dalle en plusieurs fois dont cinq de 4 dalles vers l'avant. Comprendre encore que l'ordre des déplacements vers l'avant ou vers l'arrière n'est pas donné et qu'il dépend de la face du jeton.
- Trouver éventuellement des modèles pour s'approprier la situation ; par exemple que le chemin des dalles correspond à un « ruban » ou une « piste » des nombres, que les déplacements correspondent à des additions de 4 ou des soustractions de 2.

Il y a plusieurs procédures (ou stratégies) pour aborder la tâche des calculs :

- Par tâtonnements et essais en partant de 13 et en avançant de 4 et reculant de 2 jusqu'à obtenir 21 ou par une suite d'opérations, par exemple : 13 + 4 – 2 – 2 – 2 + 4 + 4 + 4 – 2 … = 21. Au cours de ces essais, les élèves peuvent voir que l'ordre des déplacements n'a pas d'importance sur le résultat final et qu'on peut se retrouver à certain moment avant 13 ou au-delà de 21.
- En envisageant globalement les déplacements, calculer que les que 5 faces « vertes », correspondent à une avance de 20 dalles (par addition de 5 termes « 4 » ou par multiplication 5×4) et que Catherine a avancé de 8 dalles (de la 13e à la 21e), c'est-à-dire 12 dalles de moins que ces 5 déplacements. (Ou si ces cinq faces vertes correspondaient aux 5 premiers déplacements, Catherine serait arrivée sur la 33e dalle, mais comme elle se trouve sur la vingt-et-unième à la fin, elle a reculé de 12 dalles (33 - 21). Ou encore si ces cinq faces vertes correspondaient aux 5 derniers déplacements, Catherine serait partie de la dalle 1 (21 – 20) pour finir sur la dalle 21 et aurait donc reculé de 12 dalles (13 – 1) lors des premiers déplacements).

  Comme chaque face « rouge » correspond à un recul de 2 dalles, en déduire que les faces « rouge » sont apparues 6 fois dans le recul global de 12 dalles (12 : 2).

  (Ces opérations peuvent s'illustrer par des déplacements sur une droite numérique».)

Niveaux: 3, 4, 5

Origine : Genova Tiré de « Le nez de Pinocchio » (7.II.4)

5. VACANCES D'HIVER (Cat. 3, 4, 5)

Pour ses vacances d'hiver, Michel veut acheter une tenue composée d'une veste, d'un pantalon et d'un bonnet.
Le pantalon, la veste et le bonnet sont disponibles chacun en 3 couleurs : rouge, jaune et bleu.
Michel ne veut pas de pantalon rouge. Il veut aussi que la couleur du pantalon soit différente de celle de la veste et de celle du bonnet.

Combien de tenues différentes Michel peut-il composer ?

Pour chaque tenue que vous avez trouvée, indiquez la couleur de la veste, du pantalon et du bonnet.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Combinatoire (structure multiplicative)

Analyse de la tâche

- Comprendre les informations sur les catégories de vêtements et les contraintes sur leurs couleurs et en déduire que le pantalon peut être jaune ou bleu et utiliser le fait que la veste et le bonnet ont une couleur différente de celle du pantalon.
- Interpréter correctement la deuxième contrainte et admette que la veste et le bonnet peuvent avoir ou non la même couleur.
- Organiser les solutions possibles en partant d'une hypothèse sur la couleur du pantalon, ou sur celle de la veste ou encore celle du bonnet et s'aider éventuellement d'un diagramme en arbre, d'un tableau ou d'une liste ordonnée. (Il s'agit ici d'une structure liée à la multiplication $2 \times 2 \times 2$, qui permet d'obtenir les 8 tenues « différentes » du point de vue des couleurs)

Pantalon B	Bonnet R	Veste R	Pantalon J	Bonnet R	Veste R
"	"	Veste J	"	"	Veste B
"	Bonnet J	Veste R	"	Bonnet B	Veste R
"	"	Veste J	"	"	Veste B

Ou : former les tenues (pantalon, veste, bonnet) de manière non organisés (en recourant éventuellement à des dessins ou des découpages) et éliminer ceux qui ne respectent pas les conditions (avec risques d'oublis ou de solutions non conformes).

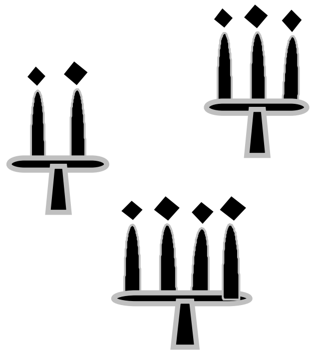
Ou : écrire l'ensemble des triplets (pantalon, veste, bonnet) des trois couleurs ($27 = 3 \times 3 \times 3$) et éliminer ceux qui ne correspondent pas aux conditions (avec risques de solutions non conformes).

Niveau : 3, 4, 5

Origine : Siena

6. DINER AUX CHANDELLES (I) (Cat. 4, 5, 6)

Laura a organisé un dîner dans son jardin. Pour créer une belle atmosphère, elle éclaire la table avec des chandeliers à deux branches, à trois branches et à quatre branches.
Elle choisit au moins un chandelier de chaque sorte et sur chacun d'eux, elle met une bougie par branche.
Laura compte qu'elle a mis 20 bougies en tout sur les chandeliers qu'elle a utilisés.



Comment Laura a-t-elle pu placer les 20 bougies ?

Donnez toutes les possibilités.

Indiquez pour chacune le nombre de chaque type de chandeliers et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : décomposition d'un nombre en somme de trois multiples

Analyse de la tâche

- Comprendre que les conditions du contexte correspondent, dans le cadre numérique, à la recherche des décompositions de 20 en une somme de termes 2, 3 et 4 (20 = 2 + 2 + … + 3 + 3 + … + 4 + 4 …) ou en somme de multiples de 2, de 3 ou de 4 avec au moins terme de chaque sorte.
- La recherche des solutions peut se faire par essais successifs au hasard, mais cette procédure ne permet pas de garantir l'exhaustivité.
- Une recherche plus systématique peut s'organiser par types de chandeliers en imposant par exemple le nombre de chandeliers à 4 bougies (ou les multiples de 4) :

  il y a au maximum 3 chandeliers à quatre bougies (5 et 4 ne permettraient pas d'avoir deux autres chandeliers de 2 et 3 branches)

  20 = 3 × **4 +** 8 = 3 × **4 +** 2 × **3 +** 1 × **2** — **6 chandeliers : 3** de quatre branches, **2** de trois et **1** de deux

  20 = 2 × **4 +** 12 = 2 × **4 +** 2 × **3 +** 3 × **2** — **7 chandeliers : 2** de quatre branches, **2** de trois et **3** de deux

  20 = 1 × **4 +** 16 → 1 × **4 +** 4 × **3 +** 2 × **2** — **7 chandeliers : 1** de quatre branches, **4** de trois et **2** de deux

  20 = 1 × **4 +** 16 → 1 × **4 +** 2 × **3 +** 5 × **2** — **8 chandeliers : 1** de quatre branches, **2** de trois et **5** de deux

Ou : remarquer que, pour utiliser un chandelier de chaque sorte, Laura a déjà besoin de 9 (2 + 3 + 4) bougies; qu'il en reste 11 à répartir; puis qu'il faudra utiliser au moins un autre chandelier à 3 branches pour obtenir un nombre pair. Il y a ainsi déjà 12 (2 + 3 + 3 + 4) bougies attribuées et il n'en reste plus que 8 à disposer, selon l'une des quatre répartitions: 3 + 3 + 2 = 4 + 4 = 4 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2 + 2.

Niveaux: 4, 5, 6

Origine: Siena

7. PARTIES DE BILLES (Cat. 5, 6)

Dimanche, Gérard a reçu un beau sac de billes et il décide de les prendre toutes, dès le lendemain à l'école, pour jouer avec ses camarades.
Le lundi, il gagne 12 billes, il est très content.
Le mardi, il rejoue, mais il perd 15 billes. Il n'est pas content.
Le mercredi, il perd encore 8 billes. Il est bien triste. De retour chez lui, il compte ses billes et il constate qu'il a perdu la moitié des billes qu'il avait le dimanche lorsqu'il a reçu son sac.
Le jeudi, il ne joue pas car il a peur de perdre encore plus de billes.
Le vendredi, il hésite, mais joue tout de même et gagne 7 billes.

Combien a-t-il de billes dans son sac le vendredi soir ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : additions et soustractions de nombres entiers inférieurs à 40, la moitié et le double

Analyse de la tâche

- Lire le problème et se rendre compte qu'il s'agit d'une suite d'additions et soustractions à effectuer, mais qu'on ne connaît pas l'état initial (dimanche).
- Constater que du lundi au mercredi, les variations sont un gain de 12, et deux pertes de 15 et 8, ce qui revient globalement à une perte de 11 (15 + 8 – 12).

  Tenir compte alors que cette perte de 11 est la moitié des billes du dimanche et que le sac contenait donc 22 billes ce jour-là. Comprendre alors que ce qui reste du mercredi est aussi 11 et que le vendredi, après un gain de 7, il aura 18 billes. On peut aussi repartir des 22 billes du dimanche pour arriver à 18 le vendredi (22 + 12 – 15 – 8 + 7 = 18)

Ou, procéder par essais à partir du dimanche, d'abord au hasard puis par essais organisés. Par exemple dimanche 30, lundi 42, mardi 27, mercredi 19, qui n'est pas la moitié de 30 et qui demande un second essai, … jusqu'à trouver 22 le dimanche, 11 le mercredi et 18 le vendredi.

Ou procéder par essais à partir du mercredi et revenir dans le temps.

Toutes les démarches peuvent s'appuyer éventuellement sur une bande ou une droite numérique ou sur des dessins qui représentent, de jouer en jour la situation

Niveaux : 5, 6

Origine : fj

8. L'ANNIVERSAIRE (Cat 5, 6, 7)

C'est l'anniversaire d'Anita.

Son amie Berthe lui apporte un gâteau au chocolat. Sur ce gâteau, elle a placé 7 bougies qui indiquent l'âge d'Anita : des rouges et des vertes. Chaque bougie rouge vaut dix ans et chaque bougie verte vaut un an.

Son ami Charles lui apporte une tarte aux fraises sur laquelle il a placé 8 bougies qui indiquent aussi l'âge d'Anita : des bleues et des vertes. Chaque bougie bleue vaut douze ans et chaque bougie verte vaut un an.

Quel est l'âge d'Anita ?

Expliquez comment vous avez trouvé son âge.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances :

- Arithmétique : numération, addition et multiplication

Analyse de la tâche :

- Après lecture de l'énoncé, se rendre compte que l'âge d'Anita peut être représenté par les 7 bougies du premier dessert et aussi par les 8 bougies du second. Il faut donc surmonter ce premier obstacle en prenant en compte le changement de valeurs des bougies qui représentent 12 ans (bleues) ou 10 ans (rouges), alors que les vertes ont la même valeur, un an.
- Se rendre compte que, pour le gâteau au chocolat, les 7 bougies peuvent représenter des âges différents, selon leur répartition « vertes ; rouges », puis passer aux nombres possibles, en établissant le rapprochement avec notre système de numération décimal : rouges <–> dizaines et vertes <–> unités. 7 rouges représentent 70, 6 rouges et 1 verte représentent 61 et ainsi de suite : 52 ; 43 ; 34 ; 25 ; 16 ; et 7 (7 et 70 peuvent être éliminés car, selon l'énoncé il y a des bougies des deux couleurs, et en raison des pluriels, vraisemblablement plus d'une de chaque couleur, ce qui permettrait presque d'éliminer aussi 61 et 16). Anita pourrait donc avoir 61, 52, 43, 34, 25 ou 16 ans.
- Avec l'arrivée du dessert de Charles et de ses 8 bougies, il faut remplacer dizaine (bougies rouges) par douzaines (bougies bleues) et dresser l'inventaire des âges possibles : 7 douzaines et 1 unité font 85, 6 douzaines et 2 unités font 74, puis 63, 52, 41, 30, et finalement 19 avec une douzaine et 7 unités. Anita pourrait donc avoir 85, 74, 63, 52, 41, 30, ou 19 ans.
- Comparer les deux listes, constater que le nombre 52 est le seul à figurer dans les deux, en conclure qu'Anita a 52 ans.

Ou tomber sur la solution par essais, sans être certain de l'unicité de la solution.

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : fj

9. UNE EXCURSION A LA MER (Cat. 5, 6, 7)

André décide de faire une excursion à la mer, sur une plage qui est à 120 km de son domicile. En route, il prend ses amis, Bruno et Charles qui l'accompagneront dans le voyage ; en premier il s'arrête pour prendre Bruno, puis parcourt encore 10 km pour s'arrêter chez Charles.
Dès cet endroit, le chemin qui reste à faire jusqu'à la mer dépasse de 2 km le triple de la distance déjà parcourue.

Quelle est la distance séparant le domicile de Bruno du bord de mer?

Expliquez votre réponse.

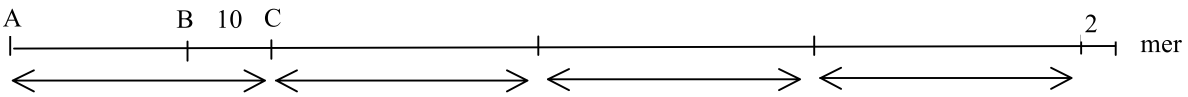
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : les quatre opérations
- Algèbre : approche d'écritures littérales

Analyse de la tâche

- Comprendre, éventuellement en s'aidant d'une représentation graphique, que la distance entre le départ (maison d'André) et la mer (120 km) est la distance du départ à la maison de Charles, à laquelle il faut ajouter 3 fois cette distance et encore 2 km.



- Se rendre compte alors que 118 (= 120 – 2) (en km) est quatre fois la distance entre la maison d'André et celle de Charles et que celle-ci est donc de 118: 4 = 29,5 (en km).

  On peut alors trouver la distance entre la maison d'André et celle de Bruno, par la soustraction des 10 km : 29,5 – 10 = 19, 5 (en km) et en déduire que par complément à 120, la distance cherchée, entre la maison de Bruno et la mer est 120 – 19,5 = 100,5 (en km).

Ou, multiplier par 3 la distance entre les maisons d'André et de Charles, et y additionner 10 et 2 km : 3 x 29,5 + 10 + 2 = 100,5 (en km)

Il y a de très nombreuses autres manières d'arriver à la solution, par exemple en reportant 3 fois la distance entre A et B et 4 fois les 10 km jusqu'à C, sans oublier les 2 derniers km.

Ou, pour ceux qui sont déjà capables d'utiliser une stratégie algébrique, en désignant par x la distance entre les maisons d'André et de Bruno, par $x + 10$ celle entre les maisons d'André et de Charles, on obtient l'équation $120 = 4(x + 10) + 2$. dont la solution est 19,5, qu'il suffira de retrancher à 120.

Niveaux : 5, 6, 7

Origine: Udine

10. ECLAIRS AU CHOCOLAT (Cat. 6, 7, 8)

Au bar du club de vacances « Archimède », il y a toujours des éclairs au chocolat. Chaque jour, du lundi au vendredi, le bar se fait livrer la même quantité d'éclairs ; tandis que le samedi et le dimanche il commande 20 éclairs de plus que les autres jours, parce qu'il y a une plus forte demande.
Chaque jour de la semaine dernière (du lundi au dimanche) tous les éclairs ont été vendus. Durant le week-end, le bar a vendu en tout 4 éclairs de plus que ceux qui ont été vendus durant les cinq premiers jours de la semaine.

Combien d'éclairs sont-ils livrés au bar chaque jour de la semaine?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

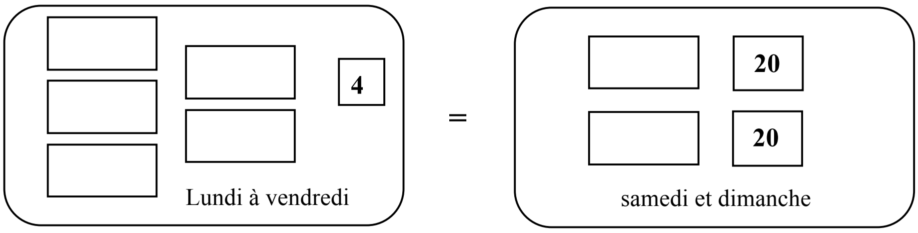
Domaine de connaissances

- Arithmétique : les quatre opérations, équivalences
- Algèbre : équations du premier degré

Analyse de la tâche

- Se représenter la situation pour les différents jours de la semaine avec une « quantité » quotitienne, les deux « suppléments » de 20 du samedi et dimanche, les « 4 de plus » et la relation d'égalité.

  On peut penser à des « paquets » pour la quantité quotidienne, ou utiliser une représentation graphique de la situation évoquant les plateaux d'une balance en prenant garde à placer le « 4 » dans le bon plateau, par exemple :



  cette représentation, mentale ou graphique, suggère une simplification de la relation en « retirant » 2 « quantités » quotidienne et 4 de chaque membre de l'égalité pour arriver à l'équivalence de 3 « quantités » quotidiennes et de 36.

  En déduire que, chaque jour ouvrable de la semaine (lundi à vendredi), sont livrés 12 (36 : 3) éclairs, et le week-end (samedi et dimanche) 32 éclairs (12 + 20).

Ou: procéder par essais organisés en imposant un nombre d'éclairs livrés du lundi au vendredi et vérifier si les autres conditions sont remplies, sinon ajuster progressivement les valeurs.

  Par exemple, avec 10 on obtient 50 et 60, avec 20 : 100 et 80, avec 15 : 75 et 70 (on s'approche), et finalement avec 12, 60 et 64 correspondant au « 4 de plus » pour le week-end.

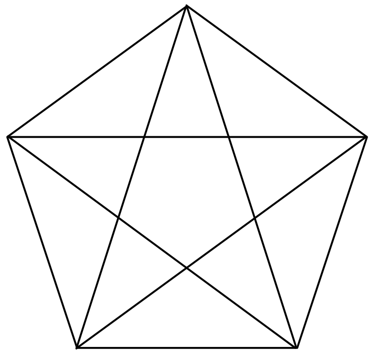
Ou, par voie algébrique, en désignant par x le nombre d'éclairs livrés chaque jour ouvrable par $x + 20$ ceux livrés le week-end, on aboutit à une équation $5x + 4 = 2(x + 20)$ ou $5x = 2(x + 20) - 4$ ou dont la solution est 12 (nombre d'éclairs livrés du lundi au vendredi) et calculer le nombre d'éclairs livrés un jour du week-end $32 = 12 + 20$.

Niveaux : 6, 7, 8

Origine: Siena

11. DES TRIANGLES, OUI, MAIS COMBIEN ? (Cat. 6, 7, 8)

Voici un pentagone régulier, dessiné avec toutes ses diagonales :



Alice dit *: « Je vois 10 triangles dans ce pentagone. »*
Bianca lui répond : « *Moi, j'en vois plus que ça ! »*

Combien peut-on voir, en tout, de triangles dans cette figure ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances :

- Géométrie : visualisation, reconnaissance et comptage de triangles dans une figure
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Savoir reconnaître des triangles dans la figure en tenant compte du caractère régulier de la figure pour identifier les triangles égaux ;
- S'organiser pour ne pas oublier de triangles, ne pas comptabiliser deux fois le même. Par exemple :

  les 10 triangles du pavage autour du pentagone central (noté *p* pour la suite de cette analyse); on peut éventuellement constater que 5 n'ont que des angls aigus, (notés *a* pour la suite) et que les 5 autres ont un angle obtus (notés *o* pour la suite).

  les 10 triangles composés d'un triangle *o* et d'un triangle *a* (*a, o*)

  les 5 triangles composés de deux triangles *o* et un triangle *a* (*o, a, o)*, un par sommet du pentagone,

  les 5 triangles (avec une diagonale comme base), composés du pentagone central et de deux triangles *a* (*a, p, a)*,

  les 5 triangles (avec une côté comme base), composés du pentagone central, un triangle *o* et de trois triangles *a* (*o, a, a, p, a)*,

  Soit cinq types de triangles faisant au total 10 + 10 + 5 + 5 + 5 = 35 triangles.

Il y a évidemment de nombreuses autres façons d'organiser l'inventaire, avec de nombreux risques de confusions ou d'oublis :

- nommer tous les « sommets » de la figure (ou les segments) et désigner les triangles par ces sommets (ou ces segments), ce qui aboutit à une notation lourde et longue, difficile à contrôler,
- utiliser des couleurs, ce qui ne permet plus de distinguer les traits,
- nommer les 11 « pavés de base » et désigner les triangles par leur composition de ces pavés,
- travailler par types de triangles d'une autre manière que ci-dessus, en tenant compte par exemple des symétries du pentagone régulier …

La tâche principale est précisément de choisir la représentation la plus efficace pour le contrôle et l'élimination des doublons.

Niveau : 6, 7, 8

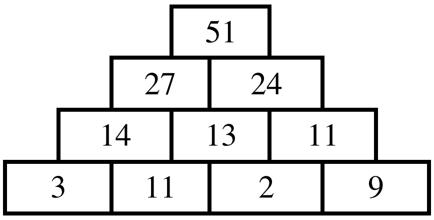
Origine : 7RMTF.1 adapté par Bourg-en-Bresse

12. PYRAMIDES DE BRIQUES (II) (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

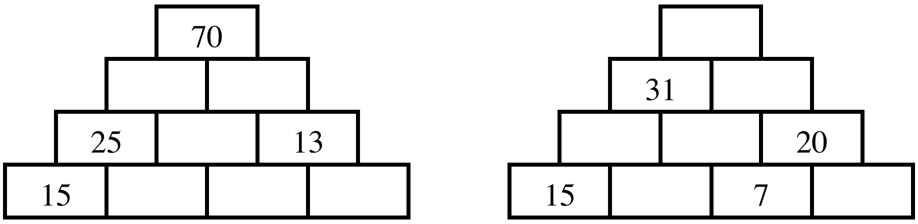
Matteo et Diego ont trouvé ce problème dans un magazine :

« Dans ces pyramides de briques, on écrit un nombre sur chaque brique, selon la règle suivante : Pour chaque brique qui repose sur deux autres, le nombre écrit est la somme des nombres des deux briques sur lesquelles elle est posée.

Exemple :



Compléter les deux pyramides suivantes : »



Matteo et Diego commencent alors à compléter les deux pyramides proposées.

Lorsqu'ils confrontent leurs résultats, ils constatent qu'ils ont la même solution pour la pyramide de gauche.

Matteo dit qu'il n'est pas possible de compléter la pyramide de droite. En revanche, Diego, très fier de lui, affirme qu'il a trouvé les nombres qui lui permettent de la compléter selon la règle.

Complétez vous aussi les deux pyramides.

Expliquez votre raisonnement pour trouver les nombres manquants.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique: addition et soustraction avec les nombres naturels et décimaux
- Logique : approche d'une résolution algébrique

Analyse de la tâche

- Vérifier l'exemple pour comprendre le fonctionnement de la pyramide et constater que deux briques peuvent être complétées immédiatement : 10 (25 – 15) à la base de la première pyramide et 13 (20 – 7) de la seconde.
- Constater que les autres nombres ne s'obtiennent pas directement, que des essais ou hypothèses sont nécessaires, puis chercher les « pistes » les plus favorables. Il y a par exemple de nombreuses décompositions de 70 (sommet de la première pyramide) ou de 13 (deuxième rang à droite) en somme de deux termes (même si on ne pense qu'aux nombres entiers positifs), qui exigeraient de très nombreux essais pour compléter la pyramide entière.
- Remarquer alors qu'une « clé » de la première pyramide peut être le nombre de la deuxième ligne, situé entre 25 et 13. Le « triangle » avec 25 et 13 à la base et 70 au sommet (voir *figure 1*) se complète alors…

  … soit par essais successifs sur le nombre-clé. (11 est trop petit, 20 est trop grand, …) pour aboutir à 16 ;

  … soit par un raisonnement déductif (ou préalgébrique) du genre : le « nombre cherché » (entre 25 et 13) sera additionné à 25 dans la case de gauche de l'étage supérieur et à 13 dans la case de droite, et finalement, 70 sera obtenu par 25 + 13 + 2 fois « le nombre cherché » ; par conséquent ce nombre sera 16, la moitié de 70 - (25 + 13) = 32,

  … soit par une procédure algébrique résumant la précédente et conduisant à l'équation : $(25 + x) + (13 + x) = 70$

- Le même raisonnement va aussi pour la deuxième pyramide, dans le « triangle » avec 15 et 7 à la base et 31 au sommet, (*Voir figure 2*) mais avec un « obstacle » supplémentaire, qui fait dire à Matteo *qu'on ne peut pas la compléter* : …

  … par essais, on trouvera que le nombre est plus grand que 4 et plus petit que 5,

  … par raisonnement préalgébrique, on trouvera que ce nombre est la moitié de 9, (Car pour obtenir 31 on effectue la somme de 15 et 7 = 22 à laquelle il faut encore ajouter 9. Par conséquent, le nombre qui doit être additionné à 15 comme à 22 doit être la moitié de 9).

  … par l'algèbre, le nombre est la solution de $(15 + x) + (7 + x) = 31$, c'est-à-dire 4,5.
- Comprendre alors que Diego a vu que le « nombre entre 15 et 7 » n'est pas entier comme tous les autres nombres présents dans la pyramide incomplète mais que l'énoncé n'interdit pas d'utiliser des nombres non entiers pour compléter la pyramide.
- Il suffit alors de compléter les autres cases par additions et soustractions.

Figure 1 les deux « triangles » - clé des deux pyramides

	70	
25 + **?**		13+ **?**
25	**?**	13

	31	
15 + **?**		7+ **?**
15	**?**	7

Figure 2 les deux pyramides complétées

	70		
	41	29	
25	16	13	
15	10	6	7

	62,5		
	31	31,5	
19,5	11,5	20	
15	4,5	7	13

Il y a encore, évidemment, de nombreuses autres manières d'organiser les essais, mais tous doivent passer par les nombres-clés 16 et 4,5.

Niveaux: 6, 7, 8, 9, 10

Origine: Rozzano

13. LE PARTERRE DE TULIPES (Cat. 7, 8, 9 10)

Mme Petitepart décide de planter des tulipes de couleurs différentes dans un parterre de son jardin. Elle dispose de tulipes de huit couleurs différentes : rouge, jaune, orange, blanc, lilas, violet, rose et saumon.

Avec les tulipes rouges, elle peut occuper $\frac{1}{2}$ du parterre, avec les tulipes jaunes elle peut occuper $\frac{1}{3}$ du parterre, avec les tulipes orange $\frac{1}{4}$, avec les tulipes blanches $\frac{1}{5}$, avec les tulipes lilas $\frac{1}{6}$, avec les tulipes violettes $\frac{1}{8}$, avec les tulipes roses $\frac{1}{9}$, avec les tulipes saumon $\frac{1}{12}$.

Madame Petitepart veut occuper complètement son parterre et, pour chaque couleur choisie, elle veut utiliser toutes les tulipes à disposition. Mais pour y arriver, elle doit bien choisir les couleurs. Elle se rend compte qu'elle peut choisir trois couleurs de tulipes mais, par exemple, elle ne peut pas prendre ensemble les tulipes rouges, jaunes et orange.

Quelles sont les trois couleurs de tulipes avec lesquelles Madame Petitepart peut occuper entièrement son parterre ?

Est-ce possible d'occuper entièrement le parterre avec les tulipes de quatre couleurs. Si oui, lesquelles ?

Expliquez vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique: fractions (de numérateur 1), somme et différence

Analyse de la tâche

- Comprendre les critères que Mme Petitepart entend respecter pour planter ses tulipes de façon à couvrir entièrement le parterre de fleurs en utilisant tous les bulbes des couleurs qu'elle aura sélectionnées.
- Observer que la partie du parterre qui peut être couverte avec une variété de tulipes est exprimée par une fraction de numérteur 1 et que l'entier correspond à la totalité du parterre.
- Se rendre compte qu'il faut trouver trois ou quatre fractions, parmi celles données, dont la somme est égale à 1.
- Constater par exemple qu'en choisissant des tulipes rouges, jaunes et orange on obtiendrait $1/2 + 1/3 + 1/4 = 13/12 > 1$ et on couvrirait plus que le parterre.
- Procéder par essais successifs et trouver qu'en utilisant des tulipes rouges, jaunes et lilas on peut remplir exactement le parterre : $1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$
- En procédant de même, trouver qu'en utilisant les tulipes rouges, oranges, lilas et saumon, on obtient une seconde solution : $1/2 + 1/4 + 1/6+ 1/12 = 1$

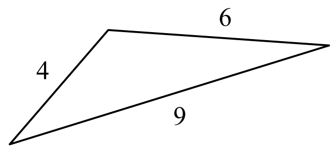
Ou réduire au même dénominateur les 8 codes fractionnaires (le plus petit est 360) et chercher trois (puis quatre) numérateurs dont la somme est égale à 360.

Niveau : 7, 8, 9, 10

Origine : Lodi

14. BATONNETS ET TRIANGLES (Cat. 7, 8, 9, 10)

Georges a trouvé dans une boîte six bâtonnets dont les longueurs sont : 4 cm, 5 cm, 6 cm, 9 cm, 10 cm et 11 cm.
Il en choisit trois pour former un triangle.
Voici par exemple le triangle construit avec les trois bâtonnets de 4 cm, 6 cm et 9 cm de longueur :



Après avoir construit un triangle, Georges remet les trois bâtonnets dans la boîte et recommence.

Combien de triangles différents Georges pourra-t-il construire avec ses six bâtonnets ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses et décrivez-les.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Combinatoire
- Géométrie: triangle, construction, inégalité triangulaire

Analyse de la tâche

- Comprendre que trois bâtonnets permettent de construire un seul triangle.
- Comprendre que seulement les triplets vérifiant l'inégalité triangulaire permettent de construire un triangle (par exemple les triplets comme 4 - 5 - 10 ou 4 - 5 - 9 ne le permettent pas. (Un obstacle bien connu est celui du recours au seul dessin pour décider si le triangle est constructible : car même avec un dessin précis un triangle « impossible » peut apparaître 4 - 5 - 9 ou 4 - 6 - 10 ou 5 - 6 - 11).
- Dresser l'inventaire des 14 triplets différents (sans tenir compte de l'ordre pour éviter les triangles égaux) formés avec les 6 nombres: 4, 5, 6, 9, 10, 11, en éliminant ceux qui ne respectent pas l'inégalité triangulaire (l'un ne peut pas être supérieur ou égal à la somme des deux autres).

  Trouver les 14 triplets solutions :

  4 - 5 - 6 ; 4 - 6 - 9 ; 4 - 9 - 10 ; 4 - 9 - 11 ; 4-10-11 ; 5 - 6 - 9 ; 5 - 6- 10 ; 5 - 9 - 10 ;5 - 9 - 11 ; 5 - 10 - 11 ; 6 - 9 - 10 ; 6 - 9 - 11; 6 - 10 - 11 : 9 - 10 - 11

Ou : dessiner les triangles un à un.

Ou : par manipulation, découper 6 bandes et procéder par esais successifs

- Conclure qu'il y a 14 triangles possibles (y compris celui qui figure dans l'énoncé)

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Puglia et RMT (7.II.9)

15. LA DATE DE NAISSANCE (Cat. 8, 9, 10)

Michèle dit à son nouvel ami qu'elle est capable de découvrir le jour et le mois de sa naissance s'il suit les instructions suivantes :
« Multiplie par 13 le numéro de ton jour de naissance. Multiplie par 14 le numéro de ton mois de naissance. Additionne les deux produits et dis-moi le résultat final de tes calculs. »
Son ami lui répond : « *Le résultat final de mes calculs est 479. »*

Quels sont le jour et le mois de naissance de l'ami de Michèle?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique : multiples et division euclidienne
- Algèbre

Analyse de la tâche

- La première tâche est de comprendre que le résultat demandé est la somme d'un multiple de 13 (du premier au 31e) et d'un multiple de 14 (du premier au 12e).
  Pour bien comprendre la correspondance entre les dates et les sommes (et éventuellement s'assurer que deux dates de naissance différentes donnent deux résultats différents, et réciproquement), on peut imaginer les calculs de quelques dates, par exemple celles des premiers jours de l'année : 1 janvier $13 + 14 = 27$; 2 janvier $2 \times 13 + 14 = 40$; 1 février $13 + 2 \times 14 = 41$ …
  en notant ces essais dans un tableau, on peut en découvrir les régularités : en janvier, des nombres qui valent 1 de plus qu'un multiple de 13, des suites de nombres entiers consécutifs en se déplaçant « en oblique » vers le bas et vers la gauche,

jours	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	20	…	30	31
janvier (1)	27	40	53	66	79	92	105	118	131	144	…	274		404	417
février (2)	41	54	67	80	93	106	119	132	145	158	…	288			
mars (3)	55	68	81	94	107	120	.133	146	158	172	…	302		432	445

  Ce tableau permet déjà de constater que 479 est au-delà du mois de mai car le 31 mai donne $445 + 2 \times 14 = 473$. (On pourrait même y voir que 479 est à 6 « pas » de 473 : 6 lignes vers le bas et 6 colonne vers la gauche, le 25 novembre).

Ou : soustraire de 479 des multiples de 14 (du 1 jusqu'au 12e pour les mois) et diviser le résultat par 13 jusqu'à ce que l'on obtienne un nombre entier compris entre 1 et 31.

$$(479 - 1 \times 14) : 13 = 35{,}77$$
$$\ldots$$
$$(479 - 10 \times 14) : 13 = 26{,}08$$
$$\mathbf{(479 - 11 \times 14) : 13 = 25}$$
$$(479 - 12 \times 14) : 13 = 23{,}92$$

Donc la date de naissance de l'ami de Michèle est le 25 novembre.

Ou, par une méthode plus générique, comprendre que le résultat final est une expression du type :
$479 = 13j + 14m$ (j = jour de naissance; m = mois de naissance)

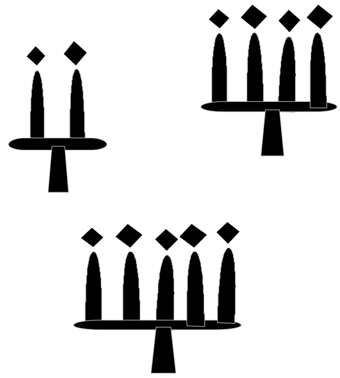
- En déduire la factorisation suivante : $479 = 13j + 13m + m = 13(j + m) + m$,
  constater que le mois de naissance (m) est le reste de la division euclidienne du résultat final 479 par 13 :
  $479 = 36 \times 13 + 11$, et que le mois de naisssance est donc novembre, 11e mois de l'année.
- en déduire le jour de naissance en résolvant l'équation suivante : $479 = j \times 13 + 11 \times 14$ d'où $j = 25$ (ou par soustraction et division par 13 comme dans la première des procédures ci-dessus)

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Luxembourg

16. DINER AUX CHANDELLES (II) (Cat. 8, 9, 10)

Laura organise un dîner dans son jardin. Pour créer une belle atmosphère, elle éclaire la table avec des chandeliers. Elle utilise quatre chandeliers à deux bougies et d'autres chandeliers à quatre bougies et à cinq bougies. Sur chaque chandelier elle met le maximum de bougies possibles. Elle utilise ainsi au total 100 bougies et 25 chandeliers.



Combien de chandeliers à 4 bougies Laura utilise-t-elle ?

Et combien à 5 bougies ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

Arithmétique : décomposition d'un nombre en somme de produits

Algèbre : système d'équations du premier degré

Analyse de la tâche

- Tirer les données numériques de l'énoncé : 100 bougies réparties sur 25 chandeliers à 2 à 4 ou à 5 bougies chacun; dont 4 chandeliers à 2 bougies.
- Simplifier la situation sans les 4 chandeliers à 2 bougies pour arriver à : 92 bougies réparties sur 21 chandeliers à 4 ou à 5 bougies.
- Se représenter les données précédentes par des égalités du genre :

  une addition de 21 termes « 4 et « 5 » : $92 = 4 + 4 + \ldots + 5 + 5 + 5 + \ldots$

  ou par une addition de 21 multiples de 4 et de 5 encore lacunaire $92 = (\ ? \times 4) + (\ ? \times 5)$

  ou, algébriquement, par un système de deux équations : $92 = 4x + 5y$ et $x + y = 21$

Il y a de multiples manières de trouver la solution par voie arithmétique :

- par essais successifs qui s'organisent de manière de plus en plus efficace lors de la recherche (par exemple, le nombre de chandeliers à 5 bougies est inférieur à 18, c'est un nombre pair, …)
- par des listes où les deux nombres de chandeliers varient simultanément, du genre :,

  $(10 \times 4) + (11 \times 5) = 40 + 77 = 95$

  $(11 \times 4)+ (10 \times 5) = 44 + 50 = 94$

  $(12 \times 4) + (9 \times 5) = 48 + 45 = 93$

  $\mathbf{(13 \times 4) + (8 \times 5) = 52 + 40 = 92}$
- Par voie algébrique, la solution du sytème linéaire de deux équations à deux inconnues donne $x = 13$ et $y = 8$

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Siena