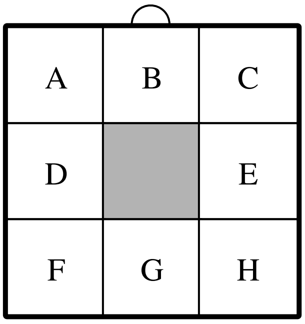
Problèmes	Catégories								Domaines				Origine
1. Cadre Multicolore	3	4										Co	LU
2. Le robot Arthur	3	4							Ar		Geo		BB
3 Loterie de fin d'année	3	4	5						Ar				SI
4. Le décor	3	4	5								Geo		CA
5. Les couleurs des chapeaux	3	4	5									Lo	RZ
6. Trois amis et leurs dessins		4	5	6							Geo		grp geop
7. Un défi pour André			5	6	7				Ar				SI
8. Le nombre de Sophie			5	6	7	8			Ar				BB
9. Chat, lapin, cochon d'Inde			5	6	7	8						Lo	SR
10. De bas en haut par les escaliers				6	7	8			Ar				AO
11. Fleur ou fusée ?				6	7	8					Geo		SI
12. Forfaits vacances				6	7	8	9		Ar				AO
13. L'héritage de Venceslas					7	8	9	10	Ar	Al			RV
14. Triangles rectangles						8	9	10		Al	Geo		PR
15. Le jeu de l'aiguille							9	10	Ar				CA
16. Amis supporters							9	10	Ar	Al			SI
17. Carrelage géométrique							9	10			Geo		SI
18. Le nombre magique							9	10	Ar	Al			PR
19. Le calcul de M. Kaprekar								10		Al			grp fonc

1. CADRE MULTICOLORE (Cat. 3, 4)

Jérôme a un cadre formé de 8 carrés égaux en carton blanc. Il veut colorier son cadre et pour le faire il a à sa disposition trois couleurs : rouge, jaune et bleu. Il commence par colorier en rouge les carrés notés sur la figure B et G.



Il décide ensuite de colorier les carrés restants en suivant ces règles :
- deux carrés ayant un côté en commun doivent avoir des couleurs différentes ;
- les carrés A et C doivent avoir la même couleur ;
- les carrés D et E doivent avoir la même couleur ;
- les carrés F et H doivent avoir la même couleur.

De combien de manières différentes Jérôme peut-il colorier son cadre en respectant les règles et en laissant les carrés B et G en rouge ?

Montrez toutes les possibilités.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que Jérôme doit colorier les carrés A, C et F, H en jaune ou en bleu, ayant déjà colorié en rouge les carrés B et G. Se rendre aussi compte que l'on peut obtenir des cadres à 2 couleurs et des cadres à 3 couleurs.
- En déduire que Jérôme a 6 possibilités différentes pour colorier ses carrés, en respectant la première condition :
  - il peut colorier A, C, F, H tous en jaune avec D et E en bleu ou en rouge ou tous en bleu avec D et E en jaune ou en rouge (4 possibilités dont 2 cadres avec trois couleurs)
  - il peut colorier A, C en jaune et F, H en bleu ou vice-versa et D et E en rouge (2 possibilités donnant deux cadres avec trois couleurs)

Bleu	Rouge	Bleu
Jaune		Jaune
Bleu	Rouge	Bleu

Jaune	Rouge	Jaune
Bleu		Bleu
Jaune	Rouge	Jaune

Bleu	Rouge	Bleu
Rouge		Rouge
Bleu	Rouge	Bleu

Bleu	Rouge	Bleu
Rouge		Rouge
Jaune	Rouge	Jaune

Jaune	Rouge	Jaune
Rouge		Rouge
Bleu	Rouge	Bleu

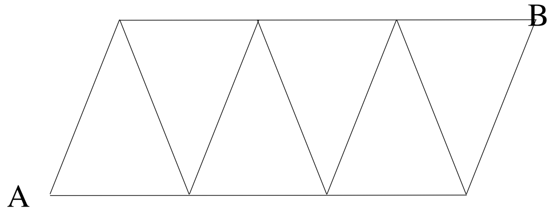
Jaune	R Rouge	Jaune
Rouge		Rouge
Jaune	Rouge	Jaune

Niveaux : 3, 4

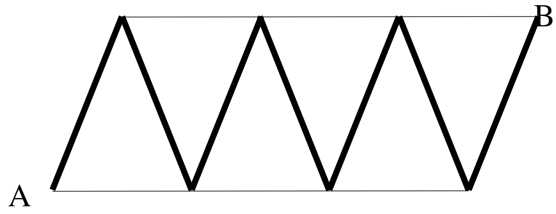
Origine : Luxembourg

2. LE ROBOT ARTHUR (Cat. 3, 4)

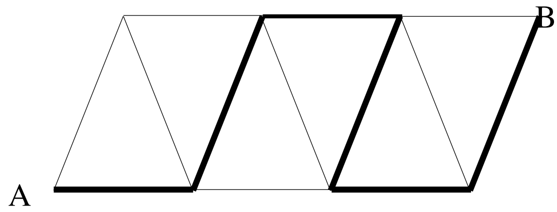
Le robot Arthur se déplace sur les lignes de la grille reproduite ici, en faisant des pas toujours de la même longueur.
Pour se déplacer de A vers B il peut suivre différents chemins.



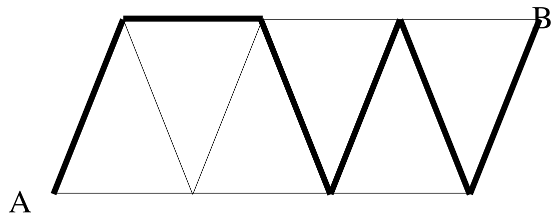
Lorsqu’il suit ce chemin, il fait 42 pas :



Par contre, il fait 30 pas quand il suit cet autre chemin :



Combien de pas fait le robot Arthur quand il suit ce chemin-là ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse



ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique : les quatre opérations
- Géométrie : parcours

Analyse de la tâche

- Comprendre que le robot Arthur fait toujours un nombre entier de pas pour parcourir un trait de grille et que pour parcourir des traits égaux il fera le même nombre de pas, parce que ses pas ont toujours la même longueur.
- Déduire du premier chemin, composé de 7 traits obliques tous égaux, que chaque trait vaut 6 pas (42 : 7).
- Observer le second chemin et se rendre compte qu’il est formé de 3 traits obliques et de 3 traits horizontaux.
- En déduire que pour parcourir les trois traits obliques du second chemin, Arthur fera 18 pas (6 × 3) et que pour parcourir les traits horizontaux il en fera 12 (30 – 18) ; par conséquent chaque trait horizontal vaut 4 pas (12 : 3).
- Conclure que pour parcourir le troisième chemin, composé de 5 traits obliques et 1 trait horizontal, Arthur fera 34 pas (6 × 5 + 1 × 4).

Ou bien, observer que le second chemin est formé de 3 traits horizontaux et de 3 traits obliques et en déduire que pour parcourir 1 trait oblique et 1 trait horizontal Arthur fait 10 pas (30 : 3). Procéder par essais pour trouver combien de pas vaut chacun des deux traits (5-5, 6-4, 7-3, 8-2, 9-1) et découvrir que l’unique possibilité compatible avec le premier chemin est 6 pas pour le trait oblique et 4 pas pour l’horizontal. Conclure qu’Arthur fait 34 pas pour le troisième chemin.

Niveaux : 3, 4

Origine : Bourg-en-Bresse

3. LOTERIE DE FIN D'ANNÉE (Cat. 3, 4, 5)

Pour la fête de la fin de l'année scolaire, on a organisé une loterie. Claire et Hélène ont acheté un billet chacune. Les deux amies comparent les nombres inscrits sur leurs billets et voient qu'ils sont tous les deux inférieurs à 10. Hélène dit à Claire :

« Le tien est un nombre vraiment particulier ! Si tu fais la somme de tous les nombres de 1 jusqu'à celui qui le précède, et si tu fais la somme de tous les nombres qui le suivent jusqu'au mien y compris, tu obtiendras le même résultat ! »

Quel est le nombre de Claire ? Et celui d'Hélène ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique : relation d'ordre et additions avec des entiers naturels

Analyse de la tâche

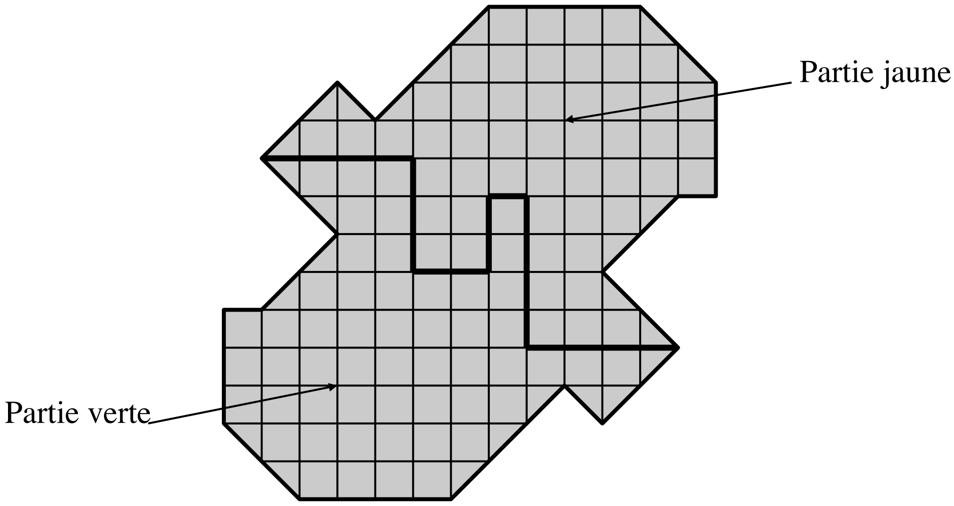
- Comprendre les conditions données dans l'énoncé et, en particulier, que le nombre d'Hélène est plus grand que celui de Claire.
- Comprendre que le nombre de Claire ne peut être ni le 1 ni le 2 (parce qu'il n'y aurait pas de nombres précédents à additionner) et qu'entre le nombre de Claire et celui d'Hélène, il doit y avoir au moins un nombre pour pouvoir l'additionner à celui d'Hélène.
- Attribuer à Claire systématiquement tous les nombres inférieurs à 10, en écartant outre le 1 et le 2, le nombre 9 parce qu'autrement Hélène aurait un numéro à deux chiffres. Se rendre compte que si Claire avait le nombre 3, la somme des nombres qui le précèdent serait 3 (1+2), mais déjà le nombre suivant serait 4, ce qui ne va pas. Si Claire avait le nombre 4, la somme des nombres qui le précèdent serait 6 (1+2+3), mais la somme des deux suivants serait 11 (5+6), ce qui ne va pas. Procéder de cette façon, jusqu'à vérifier que Claire a le nombre 6, car la somme des nombres qui le précèdent est 15 (1+2+3+4+5), qui est égal à la somme des deux nombres 7 et 8 qui le suivent. Donc Hélène a le nombre 8.
- Ou bien : trouver la réponse par essais non organisés.

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Siena

4. LE DÉCOR (Cat. 3, 4, 5)

La classe doit préparer un décor pour un spectacle.
Lili et Mathias ont été chargés de découper en deux parties un morceau de carton rigide.
Une des deux parties sera recouverte de papier fluo jaune, l'autre partie sera recouverte de papier fluo vert. Voici le dessin du projet que Lili et Mathias ont préparé.



Pour recouvrir entièrement chacune des deux parties, faut-il plus de papier vert ou plus de papier jaune ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie et mesure : comparaisons d'aires**,** symétrie

Analyse de la tâche

- Parmi les grandeurs qu'on peut percevoir sur la figure (périmètre, aire, …) choisir celle qui est pertinente pour le problème : dans ce cas l'aire.
- Comprendre que l'on doit comparer les aires des deux parties en carton et ne pas se fourvoyer en comparant les deux périmètres ou les formes des deux parties qui pourraient donner l'idée qu'elles sont superposables.
- Puisque les deux aires ne peuvent pas être estimées à l'oeil, il est nécessaire de passer aux mesures pour compter les unités d'aire déterminées par le quadrillage.
- Dans ce dénombrement, il faut procéder à une conversion d'unités : les triangles sur le bord des parties sont des demi-carrés et donc deux triangles devront être comptés pour un carré. Ce dénombrement donne :
  - pour la partie verte : 52 carrés et 12 triangles soit une mesure d'aire de 58 (en carrés),
  - pour la partie jaune : 51 carrés et 12 triangles soit une mesure d'aire de 57 (en carrés).

Ou conduire la comparaison en divisant les deux parties en polygones de même aire qui se compensent et n'ont plus besoin d'être comptés dans le décombrement.

Ou comparer carré par carré et triangle par triangle, dans l'une et l'autre des parties pour arriver à la constatation qu'il y a un carré de plus dans la partie verte.

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Cagliari

5. LES COULEURS DES CHAPEAUX (Cat. 3, 4, 5)

Quatre amies se rencontrent, chacune porte un chapeau dont la couleur correspond à son nom : Blanche porte un chapeau blanc, Violette porte un chapeau violet, Rose un chapeau rose et Bleuette un chapeau bleu.

Les quatre amies s'amusent à s'échanger leurs chapeaux et, à un certain moment, elles s'aperçoivent que :

- une seule porte encore le chapeau de la couleur correspondant à son nom,
- Blanche porte le chapeau de Bleuette,
- Rose ne porte pas le chapeau de Violette.

Après ces échanges, quelles peuvent être les couleurs des chapeaux que portent Violette, Rose et Bleuette ?

Donnez vos réponses et montrez les essais que vous avez faits pour les trouver.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique : gestion des informations, utilisation de la négation.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut « mettre de l'ordre » et examiner toutes les possibilités de correspondance entre les filles et les chapeaux. Puisqu'il est difficile de tenir compte des trois informations en même temps, en choisir prioritairement une (qui semble la plus restrictive) et rédiger l'inventaire des correspondances encore possibles.

A. Sachant que Blanche porte le chapeau bleu (de Bleuette), il reste six possibilités pour les autres filles :

1) Violette – violet, Rose – rose, Bleuette – blanc	2) Violette – violet, Rose – blanc, Bleuette – rose
3) Violette – rose, Rose – violet, Bleuette – blanc	4) Violette – rose, Rose – blanc, Bleuette – violet
5) Violette – blanc, Rose – violet, Bleuette – rose	6) Violette – blanc, Rose – rose, Bleuette – violet

En tenant compte qu'une seule fille porte le chapeau de sa propre couleur, on peut éliminer les cas où deux filles portent leur chapeau et les cas où personne n'a son propre chapeau (1, 3, 4, 5). Il reste donc les deux possibilités 2) et 6).

B. Ou bien, tenir compte des deux informations en même temps : Rose ne porte pas le chapeau de Violette et Blanche porte le chapeau bleu, en limitant ainsi l'inventaire à 4 possibilités :

	Blanche	Violette	Rose	Bleuette
I)	bleu	rose	blanc	violet
II)	bleu	blanc	rose	violet
III)	bleu	violet	rose	blanc
IV)	bleu	violet	blanc	rose

En tenant compte qu'une seule fille a le chapeau de sa propre couleur, on élimine la possibilité qu'il y ait deux filles portant leur propre chapeau et le cas où personne n'a son propre chapeau (I et III). Il reste les possibilités II) et IV).

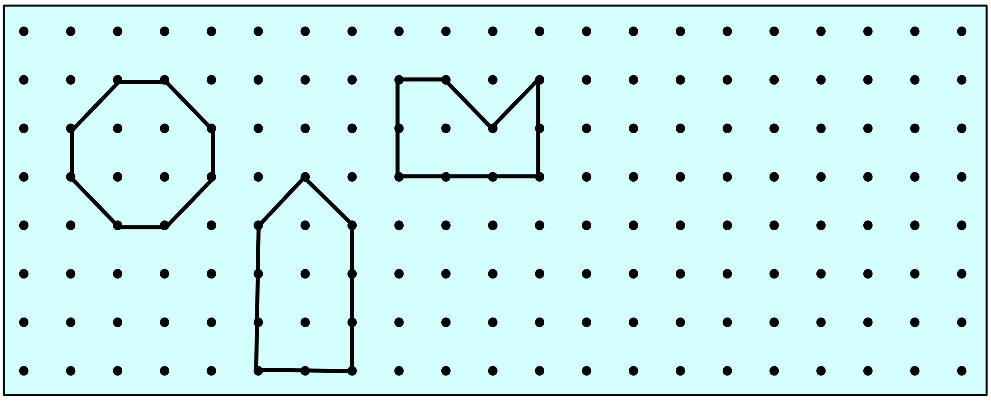
Ou bien, travailler par essais non organisés sans obtenir la certitude d'avoir trouvé toutes les solutions.

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Rozzano

6. TROIS AMIS ET LEURS DESSINS (Cat. 4, 5, 6)

Trois amis, Anne, Béa et Charles, ont dessiné ces trois figures sur une feuille de « papier ponctué » :



La figure d'Anne a la même aire que celle de Béa et le même périmètre que celle de Charles.

Quelle est la figure d'Anne ? Expliquez votre réponse.

Dessinez ensuite à côté des dessins des trois amis une autre figure qui ait la même aire et le même périmètre que la figure d'Anne.

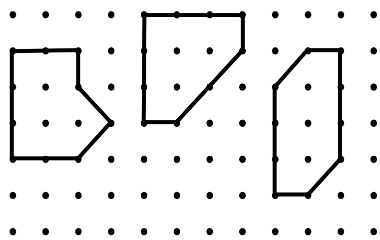
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : propriété des figures fermées, comparaisons de mesures de longueurs et d'aires
- Mesures : comparaison « intuitive » entre le côté et la diagonale d'un carré, recherche d'une unité commune d'aires

Analyse de la tâche

- Observer les périmètres des trois figures et reconnaître qu'il y a deux types de segments, ceux dont la longueur correspond à un côté (l) d'un « carré » et ceux dont la longueur correspond à sa diagonale (d).
- Pour chaque figure, compter ces deux types de segments et trouver leurs périmètres : l'octogone, $4\ d + 4\ l$; le pentagone, $2\ d + 8\ l$; l'hexagone : $2\ d + 8\ l$, ou faire une mesure avec une règle graduée.
- Trouver les aires des trois figures en comptant les carrés (q) et les demi-carrés : l'octogone, $7\ q$; le pentagone, $7\ q$; l'hexagone, $5\ q$, ou comparer les aires par découpages et superpositions.
- En conclure que la figure d'Anne est le pentagone.
- Donner une explication qui montre comment sont déterminées les aires les périmètres.
- Pour dessiner une figure ayant la même aire et le même périmètre que celle d'Anne, chercher une disposition de 2 segments de type d et 8 segments de type l qui donne une aire de 7 q. Il y a diverses figures possibles, comme, par exemple les suivantes :



Niveaux : 4, 5, 6

Origine: Groupe géométrie plane, à partir du problème n° 4 de l'épreuve I du 15ème RMT

7. UN DÉFI POUR ANDRÉ (Cat. 5, 6, 7)

Son oncle dit à André :

« *J'ai pensé à un nombre.*

- C'est un multiple de 6.

- Si tu le doubles, tu obtiens un nombre plus petit que 100.

- Si tu le triples, tu obtiens un nombre plus grand que 100.

- Si tu lui ajoutes 11 et si tu doubles le résultat, tu obtiens encore un nombre plus petit que 100.

Quel est le nombre auquel j'ai pensé ? »

Et vous, sauriez-vous trouver le nombre pensé par l'oncle d'André ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations avec des entiers naturels ; relation d'ordre entre entiers ; concept de multiple

Analyse de la tâche

- Traduire la deuxième et la troisième condition avec des opérations, divisions ou « multiplications à trous », à partir de 100 ; trouver ainsi les deux limites 50 et 33 et conclure que le nombre est compris entre 34 et 49.
- Se rendre compte que la dernière condition limite l'intervalle précédent et qu'on peut éliminer les nombres de 40 à 49 parce qu'en leur ajoutant 11 on obtient les nombres de 51 à 60, dont les doubles sont plus grands que 100. Il ne reste dans l'intervalle que les nombres 34, 35, 36, 37, 38 et 39 dont un seul, 36, est multiple de 6.

Ou bien, tenir compte d'abord de la première condition et partir de la suite des multiples de 6 : 6, 12, 18, 24, … Vérifier que les conditions pour chacun d'eux et finalement n'accepter que 36.

Ou bien, procéder par essais, contrôler la validité de toutes les conditions et continuer, si nécessaire, avec des ajustements successifs jusqu'à trouver le nombre cherché.

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Siena

8. LE NOMBRE DE SOPHIE (Cat. 5, 6, 7, 8)

Sophie a écrit à la craie un nombre de 3 chiffres. Son frère, Léo, efface le chiffre des centaines et lui dit : « *Tu vois, maintenant ton nombre a été divisé par 5* ».

Quel peut être le nombre écrit par Sophie ?

Trouvez toutes les réponses possibles et expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : représentation décimale des entiers naturels ; division

Analyse a priori :

- Comprendre la situation : en effaçant le chiffre des centaines d'un nombre de trois chiffres, on doit obtenir un nombre de deux chiffres 5 fois plus petit.
- Se rendre compte que :
  * les deux nombres ont nécessairement le même chiffre des dizaines et le même chiffre des unités ;
  * le chiffre des unités du nombre cherché ne peut être que 0 ou 5 (puisqu'il doit être divisible par 5) ;
  * le chiffre des centaines du nombre de Sophie doit être inférieur à 5 (il ne peut être que 1, 2, 3 ou 4) pour que son quotient par 5 soit inférieur à 100 et ne s'écrive donc qu'avec 2 chiffres.
- Considérer les multiples de 5 à deux chiffres : 10, 15, 20,… multiplier chacun d'eux par 5 et trouver que $25 \times 5 = 125$, $50 \times 5 = 250$, $75 \times 5 = 375$ sont les seuls nombres qui vérifient les propriétés du nombre que Sophie a écrit.

Ou bien, procéder par essais, en vérifiant à chaque fois que le nombre trouvé satisfait toutes les conditions. En faisant ainsi, on n'est pas sûr de trouver toutes les solutions.

Ou bien, procéder par essais organisés à partir de l'équation suivante : $100c + 10d + u = 5\times(10d + u)$ avec c, d, u des entiers naturels compris entre 0 et 9, avec $c \neq 0$.

- Conclure que Sophie peut avoir écrit l'un des trois nombres suivants : 125, 250, 375.

Niveaux : 5, 6, 7, 8

Origine : Bourg-en-Bresse

9. CHAT, LAPIN, COCHON D'INDE (Cat. 5, 6, 7, 8)

Trois amies habitant trois villages voisins se rencontrent. Chacune se promène avec son animal de compagnie.

- Le chat de Mylène est tigré et adore chasser les souris.
- Louise et la fille qui possède un lapin noir et blanc portent des lunettes.
- Celle qui habite Ropraz a un cochon d'Inde.
- Claude et son amie qui habite à Corcelles adorent les bonbons.

Quel est le prénom de la fille qui habite à Carrouge ?

Quel animal a-t-elle ? Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique

Analyse de la tâche

- Comprendre que les trois amies ont des animaux différents (chat, lapin, cochon d'Inde), et habitent dans trois villages différents (Corcelles, Ropraz et Carrouge).
- Analyser les quatre informations les unes après les autres et noter les déductions successives.
  1e information : Mylène a un chat et par conséquent les autres n'en ont pas
  2e information : Louise n'a pas de lapin, donc a un cochon d'Indes
  3e information : L'amie qui habite Ropraz a un cochon d'Indes, c'est donc Louise
  4e information : Claude n'habite pas à Corcelles, donc Mylène habite à Corcelles.
- Conclure que Claude habite à Carrouge et a un lapin.

Ou bien, rassembler les informations de l'énoncé dans un tableau et compléter logiquement les cases vides en raisonnant comme ci-dessus :

	Chat	Lapin	Cochon	Corcelles	Ropraz	Carrouge
Claude	non	oui	non	**non**	non	oui
Louise	non	**non**	oui	non	**oui**	non
Mylène	**oui**	non	non	**oui**	**non**	non

Niveaux : 5, 6, 7, 8

Origine : Suisse romande

10. DE BAS EN HAUT PAR LES ESCALIERS (Cat. 6, 7, 8)

Élise habite dans une maison à plusieurs étages : il y a la cuisine au rez-de-chaussée, le séjour au premier étage et sa chambre au deuxième étage. Entre la cuisine et le séjour il y a 13 marches, tandis qu'entre le séjour et la chambre, il y en a 16.
Ce matin-là, Élise, avant de sortir de son lit, a décidé de compter combien de marches elle montera et descendra durant la journée. Dans l'après-midi, elle constate qu'elle a déjà monté et descendu 132 marches.

Dans quelle pièce Élise se trouve-t-elle quand elle fait cette constatation ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations avec des entiers naturels, concept de multiple, parité

Analyse de la tâche

- Se rendre compte qu'il faut additionner les marches franchies, qu'elles soient descendues ou montées.
- Comprendre qu'il faut obtenir 132 en additionnant plusieurs fois 13 et 16.
- Observer éventuellement que, puisque 13 est impair, il faudra l'utiliser un nombre pair de fois et donc que 132 devra être obtenu en additionnant plusieurs fois 26 et 16.
- Observer encore, éventuellement, qu'au premier déplacement d'Élise, celle-ci doit nécessairement descendre 16 marches et que le problème revient à chercher une décomposition de 116 (= 132–16) comme somme de termes 26 et 16.
- Procéder par essais plus ou moins organisées. Une procédure systématique assure l'exhaustivité. Par exemple avec un raisonnement du type :

  Combien de fois Élise est-elle allée à la cuisine ?

  0 fois ? Non, car 116 n'est pas divisible par 16.

  1 fois ? Non, car 116 – 26 = 90 qui n'est pas divisible par 16.

  2 fois ? Oui, car 116 – 2 × 26 = 64 qui est divisible par 16 (64 : 16 = 4)

  3 fois ? Non, car 116 – 3 × 26 = 38 qui n'est pas divisible par 16.

  4 fois ? Non, car 116 – 4 × 26 = 12 qui est inférieur à 16.
- Conclure qu'Élise se trouve dans le séjour.

Ou bien, considérer qu'avec 13 + 16 = 29 marches, Élise va de sa chambre à la cuisine et constater qu'avec 132 marches elle peut avoir fait 4 fois (132 : 29) ce parcours (en se retrouvant donc à nouveau dans sa chambre) et descendre encore 16 marches par lesquels elle arrive dans le séjour.

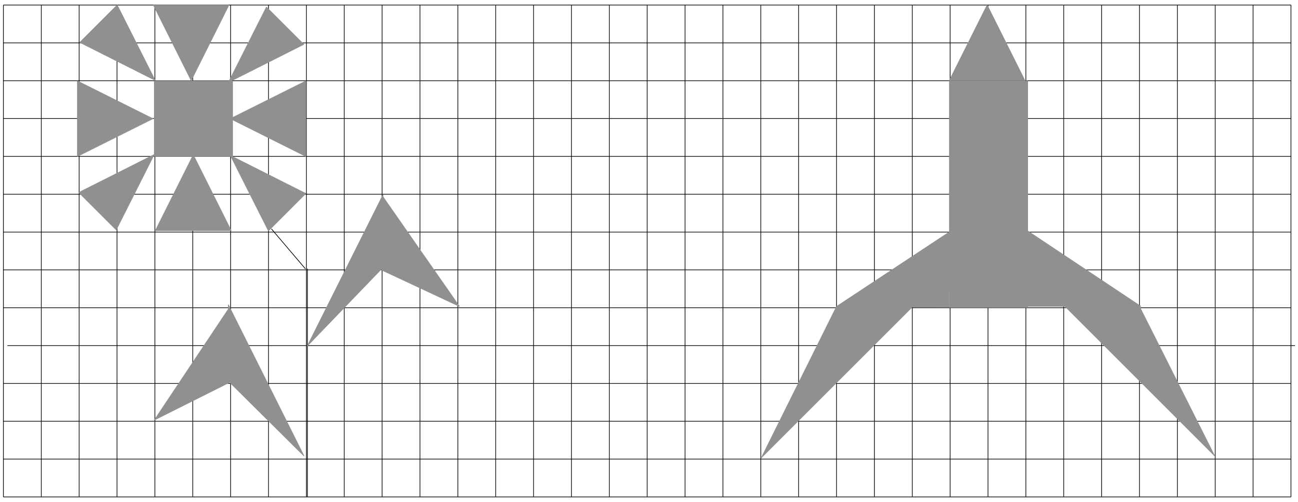
Ou bien, procéder par essais inorganisés.

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Val d'Aoste

11. FLEUR OU FUSÉE ? (Cat. 6, 7, 8)

Dans la feuille quadrillée ci-dessous, deux figures ont été dessinées en gris : une fleur et une fusée.



Quelle est la figure qui a l'aire la plus grande, la fleur ou la fusée ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Géométrie : décomposition d'une figure en polygones ; triangles, carrés, rectangles, parallélogrammes, trapèzes, aire, équivalence d'aires, symétrie axiale
- Mesure : mesure d'une aire avec une unité de mesure convenable, calcul de l'aire d'une figure particulière en utilisant une formule.

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que pour répondre à la question, il faudra déterminer les mesures de chacune des aires des parties grises, car les procédures par compensation ne permettent pas d'aller au-delà des carrés et des rectangles.
- Se rendre compte aussi que le carré du quadrillage s'impose naturellement comme unité d'aire (u), mais que les procédures de comptage ou de recouvrement sont inadéquates parce qu'on ne peut pas recouvrir les triangles avec des carrés entiers.
- Élaborer une stratégie de mesure des aires des triangles rectangles en les considérant comme moitié de rectangles (divisés par deux selon une diagonale). Les deux triangles rectangles de la fusée sont demi-rectangles de 2 × 3 et ont une aire mesurant 3 u.
- Élaborer ensuite une stratégie de décomposition des grands pétales de la fleur et de la pointe de la fusée en deux triangles rectangles de 1 × 2 dont l'aire mesure 1 u. On peut aussi voir que ces deux triangles rectangles occupent la moitié d'un carré 2 × 2 dans lequel ils sont inscrits et que leur aire mesure donc 2 u.
- Élaborer enfin une stratégie plus complexe de décomposition d'un rectangle dans lequel est inscrit un triangle gris en tenant compte de ses parties « blanches » « à soustraire » formées de triangles des rectangles. Exemple : chaque feuille de la fleur peut être divisée en deux parties, inscrites dans des rectangles de 2 × 3 et de 2 × 4. Il faut éliminer des triangles rectangles blancs de 2 × 3 et de 1 × 2, et, respectivement de 2 × 4 et de 2 × 2, pour arriver à des mesures d'aire égales à 2 u (6 – 3 – 1 et 8 – 4 – 2). Même raisonnement pour les petits pétales d'aire 1,5 u (4 – 2 – 0.5) et les deux ailes de la fusée d'aires 4 u (16 – 4 – 8).
- Calculer enfin les mesures des aires des deux figures par addition. Pour la fleur : 4 + 4 × 2 + 4 × 1,5 + 4 × 2 = 26 (u) et pour la fusée : 2 + 12 + 2 × 3 + 2 × 4 = 28 (u). Conclure que la partie grise de la fusée est plus grande que celle de la fleur.
- Il y a évidemment de nombreuses modalités de décomposition des figures ou de recomposition et ensuite d'organisation des calculs. La tâche essentielle est d'obtenir le résultat à partir de rectangles entiers ou divisés par

deux. Même si certains élèves peuvent déjà avoir rencontré la « formule » de l'aire du triangle, elle ne sera pas utile ici parce que les triangles ne sont pas tous en position traditionnelle avec la base horizontale.

Nivaux : 6, 7, 8

Origine : Siena

12. FORFAITS VACANCES (Cat. 6, 7, 8, 9)

L'agence TRANSALP propose 4 forfaits différents, A, B, C et D pour une semaine de vacances. Voici ces quatre propositions, chacune comprenant quatre activités organisées ainsi :

A) 380 euro	**B) 340 euro**	**C) 320 euro**	**D) euro**
Excursion dans une île	*Gita in montagna*	*Parc d'attractions*	*Randonnée en montagne*
Randonnée en montagne	*Parc d'attractions*	*Parc d'attractions*	*Parc d'attractions*
Parc d'attractions	*Excursion dans une île*	*Gita in montagna*	*Excursion dans une île*
Parc d'attractions	*Randonnée en montagne*	*Randonnée en montagne*	*Excursion dans une île*

Le prix d'un forfait est la somme des prix de chacune des activités qui le composent. L'agence a oublié d'écrire le prix du forfait de la semaine D.

Quel est le prix du forfait de la semaine D ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations avec des nombres entiers
- Algèbre : approche de la résolution d'un système d'équations par substitutions et combinaisons

Analyse de la tâche

De nombreuses procédures peuvent être utilisées en combinant les différents forfaits.

- On peut remarquer qu'en ajoutant les activités des deux premiers forfaits et en retirant celles du troisième, on trouve celles du 4ème, d'où le prix du forfait de la semaine D : 380 + 340 – 320 = 400 euros.

Ou bien, après avoir confronté les divers forfaits entre eux, se rendre compte que :

- Le forfait D diffère du forfait B seulement par une « Excursion dans une île » qui remplace une « Randonnée en montagne » ;
- Entre le forfait A et le forfait C, il y il a une différence de prix de 60 euros (380 – 320) dû seulement à la différence de coût entre l'« Excursion dans une île » et la « Randonnée en montagne ».

En déduire que le forfait D vaut 60 euros de plus que le forfait B valant 340 euros et qu'il vaut donc 400 euros.

Ou bien, en partant de l'option C on peut trouver immédiatement que la « Randonnée en montagne » plus le « Parc d'attraction » coûtent ensemble 160 euros.

- Comparer ensuite ce résultat avec le prix des forfaits dans lesquels on trouve ces deux excursions. Dans l'option A, par exemple, si l'on enlève aux 380 euros du prix total les 160 euros des deux activités « Randonnée en montagne » et « Parc d'attractions», on obtient 220 euros qui est le prix total des deux activités « Parc d'attractions » et « Excursion dans une île ».
- Considérer maintenant l'option B et trouver que le prix d'une « Randonnée en montagne » est égal à (340 – 220) : 2 = 60 euros. Il en résulte que le « Parc d'attractions » coûte 100 euros et que l'« Excursion dans une île » coûte 120 euros.
- Conclure que le forfait vacances D vaut 60 + 100 + 120 + 120 = 400 euros.

Ou bien, au niveau 9, une solution algébrique peut être initiée, conduisant à un système de 4 équations du premier degré dont la résolution suit les procédures intuitives précédentes.

Niveaux : 6, 7, 8, 9

Origine: Valle D'Aosta

13. L'HÉRITAGE DE VENCESLAS (Cat. 7, 8, 9, 10)

Le roi Venceslas était fier de ses filles et de ses fils et adorait ses petits-enfants. À sa mort, il laissa un testament où il demandait que les 50 millions d'écus de son héritage soient partagés entre chacun des 11 membres de sa descendance de la façon suivante :

- 6 millions pour chaque fils,
- 4 millions pour chaque fille,
- 1 million pour chaque petit-fils et petite fille.

Combien le roi Venceslas avait-il de fils, de filles et de petits-enfants ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

- Arithmétique : opérations avec des entiers naturels
- Algèbre : système d'équations du premier degré

Analyse de la tâche

- Repérer les données essentielles (11 personnes de 3 catégories doivent se partager 50 millions en parts de 6, 4 ou 1millions) et les transcrire dans le domaine numérique.

  - La somme des trois nombres de personnes (a fils, b filles et c petits-enfants) de chaque catégorie est égale à 11 ($a + b + c = 11$).

  - Le nombre 50 (l'héritage) doit être exprimé comme la somme de 11 termes égaux à 6, 4 ou 1, qui peuvent être regroupés en multiples de 6, 4 et 1 ($6a + 4b + c = 50$).
- Comprendre que l'usage des pluriels dans l'énoncé indique que le roi a au moins deux fils, deux filles et deux petits-enfants.
- Noter éventuellement que le nombre c de petits-enfants est pair, car il doit être égal à $50 – 6a – 4b$. En déduire que le nombre de fils ou de filles est impair, car le nombre total des héritiers est 11.
- Observer que le nombre a de fils est inférieur à 7, sinon ils auraient à eux seuls au moins 42 millions d'écus et il resterait au plus 8 millions d'écus qui ne suffiraient pas pour deux filles et deux petits-enfants.
- Comprendre que la solution du problème passe par un inventaire des répartitions possibles des 11 héritiers en trois catégories, avec à chaque fois une vérification du total des parts qui doit être 50 (ou par la recherche des solutions entières du système des deux équations écrites ci-dessus).
- Faire des essais au hasard qui peuvent aboutir à la solution sans être certain de son unicité, ou organiser l'inventaire de manière systématique (en s'aidant de traces écrites sous la forme de listes ou de tableaux). L'organisation la plus économique est de considérer en premier lieu les parts des fils (de 6 millions) pour lesquelles les possibilités sont les moins nombreuses, de calculer ce qui reste pour les parts des filles et petits-enfants (4 et 1 millions) puis de vérifier s'il est décomposable en un nombre donné de multiples de 4 et de 1.
- Exemple, parmi les 11 multiples de 6 à considérer, éliminer 66, 60, 54, qui sont supérieurs à 50, puis 48 (reste 2 qui ne permet pas d'obtenir une part de 4) ; puis $42 = 6 \times 7$ (reste 8, qui ne permet pas quatre parts de 4 et 1). Une première solution est $36 = 6 \times 6$ (reste 14 ce qui permet de faire 5 parts pour les 3 filles et les 2 petits-enfants ou $3 \times 4 + 2 \times 1$). Les autres multiples de 6 sont aussi à éliminer : $30 = 6 \times 5$, reste 20, impossible à répartir en 6 parts de 4 et 1 ; $24 = 6 \times 4$, reste 26, impossible à répartir en 7 parts de 4 et 1 ; $18 = 6 \times 3$, reste 32, impossible à répartir en 8 parts de 4 et 1, etc.
- Vérifier en tout cas l'unicité de la solution : 6 fils, 3 filles et 2 petits-enfants.

  Il y a évidemment de multiples manières d'organiser l'inventaire systématique et d'en conserver des traces, qui demandent toutes des décompositions de 50 en sommes de multiples de 6, 4 et 1, et d'économiser des vérifications (par exemple en considérant seulement les quatre nombres possibles de petits-enfants, qui doivent être pairs : 2, 4, 6, 8 et les décompositions correspondantes de 48, 46, 44 et 42 en sommes d'un nombre déterminé de multiples de 4 et de 6).

Ou bien, par l'algèbre il y a également des nombreuses manières de trouver les solutions entières (supérieures ou égales à 2) du système d'équations du premier degré à 3 inconnues : $a + b + c = 11$ et $6a + 4b + c = 50$.

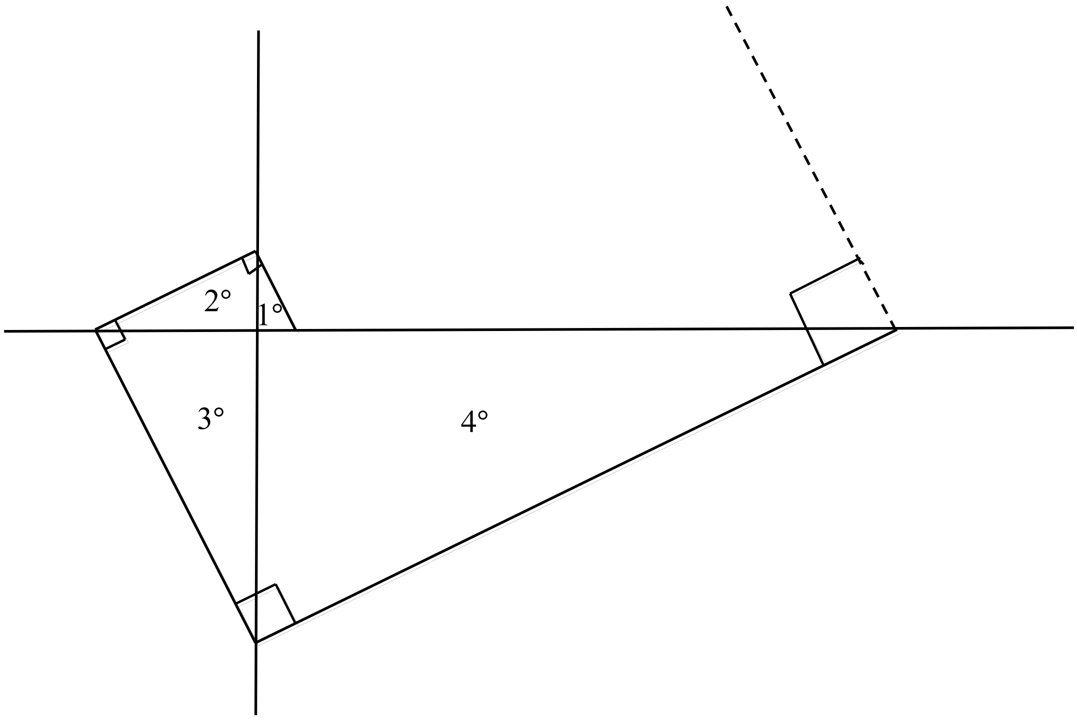
Par exemple, après avoir observé que $a < 7$, procéder en attribuant a successivement les valeurs 6, 5, ...2, résoudre à chaque fois le système des deux équations obtenues avec les inconnues b et constater que l'unique solution acceptable est $a = 6$, $b = 3$ et $c = 2$.

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Riva del Garda

14. TRIANGLES RECTANGLES (Cat. 8, 9, 10)

Lisette s'amuse à construire une suite de triangles rectangles, ayant chacun un côté en commun avec le suivant et l'hypoténuse perpendiculaire à celle du triangle précédent, comme sur la figure suivante :



Le premier triangle dessiné par Lisette est le plus petit, c'est celui qui est indiqué par 1° sur la figure. Ses côtés de l'angle droit mesurent 1 cm et 2 cm.

Quelles seraient les mesures des trois côtés du 100e triangle si Lisette pouvait le dessiner ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances :

- Géométrie : triangle rectangle, triangles semblables
- Fonctions : suites numériques, récursivité

Analyse de la tâche :

Comprendre comment la suite des triangles est construite.

Remarquer que les triangles successivement construits sont des agrandissements des précédents (conservation des angles et côtés dans le même rapport 2)

- En déduire que les côtés de l'angle droit du second triangle mesurent (en cm) 2 et 22, que les côtés de l'angle droit du troisième mesurent 22 et 23 et ainsi de suite.
- Remarquer la régularité des mesures des côtés de l'angle droit (et éventuellement de l'hypoténuse) du nième triangle : 2n-1 , 2n , construire un tableau :

Triangle n°	1	2	3	4	…	n
Mesure du petit côté	1	2	2^2	2^3		2^{n-1}
Mesure du grand côté	2	2^2	2^3	2^4		2^n
Mesure de l'hypoténuse	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$2^2\sqrt{5}$	$2^3\sqrt{5}$		$2^{n-1}\sqrt{5}$

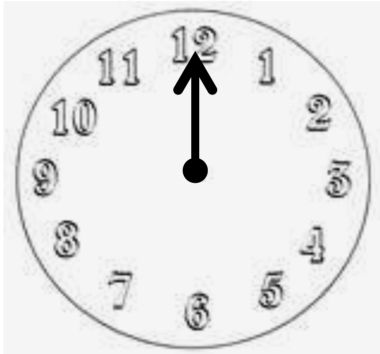
Les côtés du 100e triangle mesurent donc : 2^{99} , 2^{100} et son hypoténuse mesure $2^{99}\sqrt{5}$ d'après le théorème de Pythagore.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Parma

* Les mesures des hypoténuses des triangles intermédiaires ne sont pas nécessaires pour résoudre le problème

15. LE JEU DE L'AIGUILLE (Cat. 9, 10)



Pour jouer au jeu de l'aiguille, on utilise un disque en carton sur lequel on a indiqué les heures comme sur une horloge.
Au centre du disque, on a fixé une aiguille que l'on peut faire tourner dans les deux sens et la placer devant chacune des heures.
Au début d'une partie, on met l'aiguille sur le 12, puis on lance une pièce de monnaie 11 fois de suite.
Chaque fois que l'on obtient « Pile », on fait avancer l'aiguille de 5 heures, et chaque fois que l'on obtient « Face », on la fait reculer de 3 heures.
On a gagné si l'aiguille indique 11 heures après ces 11 lancers de la pièce.

Pour gagner, combien de fois peut-on obtenir « Pile » et combien de fois « Face » en 11 lancers ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction, multiplication, restes modulo 12, entiers relatifs

Analyse de la tâche

- Comprendre le fonctionnement du jeu : à partir du 12, les déplacements successifs de l'aiguille sont bien définis, au hasard : 5 heures en avant si on fait « Pile » ou 3 heures en arrière si on fait « Face ». L'aiguille peut indiquer au bout de 11 déplacements l'une des heures de 1 à 12.
- Vérifier que si l'aiguille allait seulement en avant, au onzième déplacement, elle tomberait sur 7 heures. Donc 7 est une des positions finales possibles.
- Remarquer que 4 déplacements en arrière font un tour de cadran et vérifier que si l'aiguille allait toujours en arrière, au onzième déplacement, elle tomberait sur 3 heures. Donc 3 est une autre possibilité.
- Décrire tous les jeux possibles en précisant où l'aiguille arrive en 11 déplacements. Observer que l'ordre de ces déplacements n'intervient pas et construire un tableau comme, par exemple le tableau ci-dessous.
- Remarquer qu'un tour complet de cadran fait 12 heures (en avant ou en arrière) et comprendre que, pour trouver l'heure d'arrivée de l'aiguille après un déplacement total de N heures dont 5X en avant (avec X « Pile ») et 3Y en arrière (avec Y « Face »), il suffit de trouver le reste de la division par 12 de N ou de N + un multiple de 12.

Nombre X de « Pile »	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre Y de « Face »	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Déplacement N = 5X – 3Y	–33	–25	–17	–9	–1	7	15	23	31	39	47	55
Arrivée de l'aiguille	3	11	7	3	11	7	3	11	7	3	11	7

- Déduire du tableau qu'à la fin d'un jeu, l'aiguille peut se trouver sur le 3 ou sur le 7 ou sur le 11. Pour gagner, il faut que l'aiguille indique le 11, ce qui est le cas si on obtient soit 1 « pile » et 10 « face », soit 4 « pile » et 7 « face », soit 10 « pile » et 1 « face »

Niveaux : 9, 10

Origine : Cagliari

16. AMIS SUPPORTERS (Cat. 9, 10)

Deux amis, Jean et Pierre sont passionnés de football, mais supportent deux équipes différentes. Ils confrontent les résultats obtenus par leurs équipes dans le dernier championnat.
Jean affirme : « *Si mon équipe avait gagné quatre matchs de plus et la tienne quatre matchs de moins, mon équipe en aurait gagné le double de la tienne* ».
Pierre ajoute : « *Oui, c'est juste. Mais il est aussi vrai que si ton équipe avait gagné quatre matchs de moins et la mienne quatre matchs de plus, nos deux équipes auraient gagné le même nombre de matchs* ».

Dans ce dernier championnat, combien de matchs l'équipe de Jean et l'équipe de Pierre ont-elles gagné ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances :

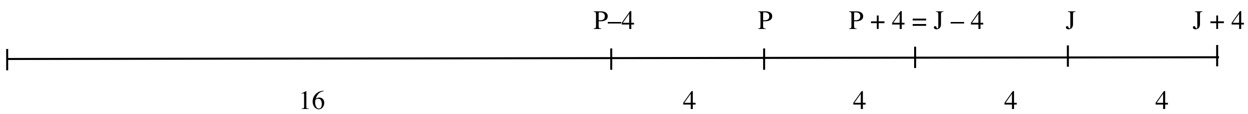
- Arithmétique : nombres pairs et impairs, opérations avec les entiers naturels
- Algèbre : introduction de lettres pour représenter des relations entre nombres, équations et systèmes linéaires

Analyse de la tâche :

- Comprendre, d'après l'affirmation de Pierre, que l'équipe de Jean a gagné 8 matchs de plus que celle de Pierre.
- Comprendre, d'après l'affirmation de Jean, que l'équipe de Pierre a gagné au moins 4 matchs et que l'équipe de Jean a gagné un nombre pair de matchs (parce que ce nombre augmenté de 4 est pair étant le double d'un autre nombre). En déduire de même que le nombre de matchs perdus par l'équipe de Pierre est pair (parce qu'additionné à 8 il donne un nombre pair).
- Procéder par essais organisées, éventuellement en se servant d'un tableau. Supposer que le nombre des matchs gagnés par l'équipe de Pierre est 6, 8, 10, 12…, considérer par conséquent que le nombre des matchs gagnés par l'équipe de Jean est 14, 16, 18… et vérifier si les conditions de l'énoncé sont respectées. Conclure qu'avec 20 matchs gagnés par l'équipe de Pierre et 28 matchs gagnés par l'équipe de Jean, les deux affirmations sont vérifiées.

Ou bien : en langage algébrique, introduire des lettres pour représenter le nombre des matchs gagnés par les deux équipes. Par exemple, P pour l'équipe de Pierre et J pour l'équipe de Jean. Exprimer la seconde affirmation en écrivant J = P + 8. Chercher ensuite la valeur de P qui rend J + 4, c'est-à-dire P + 12, égal à 2 (P – 4). En déduire que 12 = P – 8, d'où P = 20. Conclure que J = 28.

Ou bien : construire un schéma du type suivant, considérant que J + 4 est le double de P – 4 et qu'il y a 16 matchs de différence entre J + 4 et P – 4, du fait que J – 4 = P + 4 :



En déduire que J + 4 = 2 × 16 = 32, d'où J = 28 et P = 20.

Ou bien, au niveau 10, noter par exemple par a le nombre de matchs gagnés par l'équipe de Pierre et par b le nombre de matchs gagnés par l'équipe de Jean et traduire les conditions de l'énoncé par le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} b + 4 = 2(a - 4) \\ b - 4 = a + 4 \end{cases}$$

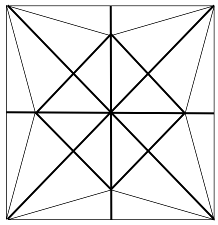
En soustrayant les deux équations membre à membre, on a : 8 = a –12, d'où a = 20 et b = 28.

Niveaux : 9, 10

Origine : Siena

17. CARRELAGE GÉOMÉTRIQUE (Cat. 9, 10)

Cette figure montre le dessin d'un carreau d'un carrelage à motifs géométriques.



- La partie centrale du carreau est formée d'un carré gris clair de 20 cm de côté.
- Sur les côtés de ce carré, on a disposé en forme d'étoile quatre triangles équilatéraux blancs dont les sommets coïncident avec les quatre coins du carreau.
- Entre l'étoile et les côtés du carreau il y a une bordure gris foncé formée de quatre triangles isocèles.

Quelles sont les mesures de l'aire de la partie blanche et de la bordure gris foncé du carreau ?

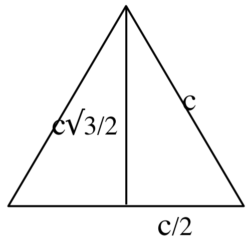
Justifiez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances :

- Géométrie : le carré et ses symétries, aire du triangle équilatéral, triangle isocèle

Analyse de la tâche :



- Calculer l'aire d'un triangle équilatéral de côté c = 20 cm dont la hauteur est donnée
  - soit par la formule connue : $c\sqrt{3}/2$
  - soit en utilisant la propriété de Pythagore sur le triangle rectangle formé par la moitié d'un triangle équilatéral de côté c : le carré de sa hauteur est donc égal à $c^2 – c^2/4 = 3c^2/4$.

  L'aire du triangle équilatéral est le demi-produit de sa base c par sa hauteur $c\sqrt{3}/2$, soit $(c^2/4)\sqrt{3} = 100\sqrt{3}$ (≈173,20, en cm²). Conclure que la mesure de l'aire recouverte par les quatre triangles blancs est $400\sqrt{3}$ (≈ 692,82 cm²).
- Il reste à trouver l'aire du carreau. Il faut justifier que c'est un carré.

  La figure a 4 axes de symétrie constitués par les diagonales et les médianes du petit carré gris clair. Ces médianes sont les diagonales du carreau, elles sont perpendiculaires, se coupent en leur milieu et sont de même longueur. Le carreau a donc la forme d'un carré.
- Pour trouver la mesure de l'aire de ce carré, on peut déterminer la longueur d'une diagonale, formée d'un côté du petit carré et de deux hauteurs des triangles équilatéraux. On obtient $c + c\sqrt{3} = c\,(1+\sqrt{3}\,)$
- L'aire du grand carré est donc égale à $(c^2/2) \times (1 + \sqrt{3}\,)^2$.
- L'aire de la bordure gris foncé est alors obtenue par la différence (aire du grand carré – aire de l'étoile) :

  $(c^2/2) \times (1 + \sqrt{3}\,)^2 – (c^2 + 4(c^2/4)\sqrt{3}\,) = (c^2/2) \times (1 + \sqrt{3}\,)^2 – c^2(1 + \sqrt{3}\,) = (c^2/2) \times (1 + \sqrt{3}\,)[(1 + \sqrt{3}\,) – 2] =$

  $= (c^2/2) \times (1 + \sqrt{3}\,)(\sqrt{3} -1) = c^2 = 400$, en cm².

Niveaux : 9, 10

Origine : Siena

18. LE NOMBRE MAGIQUE (Cat. 9, 10)

Marc remarque que 143 est un nombre « magique », car en le multipliant par certains nombres, on obtient des résultats très particuliers :

$143 \times 21 = 3003$
$143 \times 49 = 7007$
$143 \times 112 = 16016$
$143 \times 147 = 21021$

Marc réussit à trouver tous les nombres de trois chiffres qui, multipliés par 143, donnent comme produit un nombre de cinq chiffres avec un zéro à la place centrale et avec deux nombres égaux situés à la gauche et à la droite du zéro.

Combien Marc a-t-il trouvé de nombres à trois chiffres ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances :

- Arithmétique : chiffres et nombres, numération de position
- Algèbre : calcul littéral

Analyse de la tâche :

- Comprendre que, pour trouver d'autres nombres on peut diviser par 143 les produits du type $n0n$, où n est un nombre de deux chiffres. Par exemple 17017 : 143 = 119, 15015 : 143 = 105, 14014 : 143 = 98, mais 98 n'est pas à trois chiffres et doit donc être écarté.
- Comprendre que cette procédure est très longue, parce que n peut varier de 10 à 99. Il serait donc bien de comprendre de quelle propriété jouissent les nombres cherchés.
- Observer que 21, 49, 112, 147 sont multiples de 7 et comprendre qu'il faut vérifier cette conjecture. Il faut donc rechercher les nombres a tels que $143\,a = n0n = 1001n$, donc $a = \frac{1001}{143}n = 7n$

  Donc les nombres à rechercher sont tous les multiples de 7, avec n compris entre 15 et 99 pour obtenir des nombres de trois chiffres ; il y en a cinq dans la première dizaine et dix dans toutes les autres. Il y a donc $5 + 8 \times 10 = 85$ nombres cherchés.

Ou bien : en notant x et y les deux chiffres du nombre n avec $x \neq 0$, le produit peut s'écrire sous la forme polynomiale : $10000\,x + 1000\,y + 10\,x + y = 10010\,x + 1001\,y$. Reconnaître que 10010 et 1001 sont multiples de 143 respectivement par 70 et 7, donc le produit peut s'écrire $143 \times (70\,x + 7y)$ ou encore $143 \times 7 \times (10\,x + y)$. Les nombres cherchés sont donc tous les multiples de 7 de trois chiffres tels que $100 < 7 \times (10\,x + y) < 1000$, ou encore $\frac{100}{7} < (10\,x + y) < \frac{1000}{7}$, ainsi $(10\,x + y)$ est un nombre naturel de deux chiffres plus grand que 14. Alors pour $x = 1$, y varie de 5 à 9, on obtient cinq multiples de 7 ($7 \times 15, 7 \times 16, 7 \times 17, 7 \times 18, 7 \times 19$), pour $x = 2$ on obtient dix multiples de 7 ($7 \times 20, 7 \times 21, \ldots 7 \times 29$) et ainsi de suite jusqu'aux dix multiples qu'on obtient pour $x = 9$ ($7 \times 90, 7 \times 91, \ldots 7 \times 99$). Il y a donc $5 + 8 \times 10 = 85$ nombres cherchés.

Ou bien : désigner par n le nombre à deux chiffres situé à gauche et à droite du résultat à cinq chiffres ayant un 0 à la place centrale. Ce nombre $n0n$ est donc égal à $(1001)\,n$ qui doit être un multiple de 143. Or $1001 = 7 \times 143$, on en déduit que les nombres à trois chiffres de la forme $7n$ sont les nombres cherchés.

- Les nombres n à deux chiffres qui multipliés par 7 donnent des nombres à trois chiffres sont les entiers de 15 à 99 ($7 \times 14 = 98$ et $7 \times 99 = 693$. Marco a donc pu trouver 85 nombres, de 105 à 693, tous multiples de 7.

Niveaux : 9, 10

Origine : Parma

19. LE CALCUL DE M. KAPREKAR[1] (Cat. 10)

Le mathématicien M. Kaprekar, est bien connu pour son habileté en calcul. Il aime proposer à chaque nouvel élève le jeu suivant :
« *Pense à un nombre de trois chiffres, tous différents. Écris le nombre le plus grand que tu peux former avec ces trois chiffres, puis écris le nombre le plus petit. Fais la différence des deux. Avec le nombre obtenu, recommence. Fais cette opération cinq fois. En attendant, j'écris sur ce papier le résultat que tu vas trouver* ».
Effectivement, M. Kaprekar prévoit toujours le bon résultat.

Quel est le nombre que M. Kaprekar écrit sur son papier ?

Montrez pourquoi on trouve toujours le même nombre.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances :

- Arithmétique/Numération : décomposition d'un nombre entier en base 10. Divisibilité par 9.
- Algèbre/Fonctions : définition par un algorithme de calcul, relation objet-image, valeur constante.

Analyse de la tâche :

- Comprendre que si M. Kaprekar peut connaître par avance le résultat, c'est que celui-ci est unique, facile à déterminer avec un seul exemple.
- Désigner par K(n) (ou une autre notation) le résultat pour le nombre n du calcul de M. Kaprecar et donner un exemple : K(819) = 981 – 189 = 792.
- Appliquer encore quatre fois ce calcul aux résultats successifs : K(792) = 693 ; K(693) = 594 ; K(594) = 495 ; K(495) = 495 et conclure que le nombre de M. Kaprekar est 495.
- Pour répondre à la deuxième question, après avoir appliqué K sur quelques exemples, remarquer que les résultats successifs ont 9 pour chiffre central, sont divisibles par 9, la somme des chiffres des centaines et des unités valant toujours 9.
- Remarquer que les résultats suivants sont des nombres qui ont un 9 au centre et que les deux autres chiffres sont suivant les cas 1-8 ; 2-7 : 3-6 ; 4-5. Se rendre compte que, selon le calcul de M. Kaprekar, chaque nombre de la forme x9y donne le même résultat que y9x et qu'il suffit donc d'effectuer les calculs pour ces quatre cas.
- Procéder systématiquement en commençant par exemple par 198, trouver 792, puis 693, puis encore 594 et enfin 495. Appliquer cette procédure à 297, à 396 et à 495 et conclure que 495 est le nombre de M. Kaprekar.

Ou bien, en désignant par a le plus grand chiffre du nombre n, par b l'intermédiaire et par c le plus petit, écrire formellement $K(n) = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99\,(a - c)$ et en déduire qu'il est divisible par 99.

- Remarquer que $a - c \geq 2$ (puisqu'il y a b entre eux et que les 3 chiffres sont différents) et qu'il y a seulement 8 multiples possibles de 99 comme valeurs pour K(n).
- Calculer ces 8 multiples (multiplier par 100 et soustraire le facteur) et appliquer à chacun 4 fois successivement la fonction K. Dresser le tableau de calcul suivant en remarquant qu'il n'y a que 8 fois à calculer K :

K(n) : multiples de 99	KoK(n)	KoKoK(n)	KoKoKoK(n)	KoKoKoKoK(n)
2 × 99 = 198	792	693	594	495
3 × 99 = 297	693	594	495	495
4 × 99 = 396	594	495	495	495
5 × 99 = 495	495	495	495	495
6 × 99 = 594	495	495	495	495
7 × 99 = 693	594	495	495	495
8 × 99 = 792	693	594	495	495
9 × 99 = 891	792	693	594	495

---

[1] Dattatreya Ramachandra Kaprekar (1905 - 1988) est un mathématicien indien connu pour ses recherches sur les nombres. On lui doit la notion de nombre de Kaprekar ainsi que l'algorithme de Kaprekar. Boudé par ses contemporains, ses travaux seraient passés inaperçus s'il n'avaient pas été relayés par Martin Gardner, spécialiste des énigmes mathématiques (Wikipedia).

Niveau : 10
Origine : grp fonctions