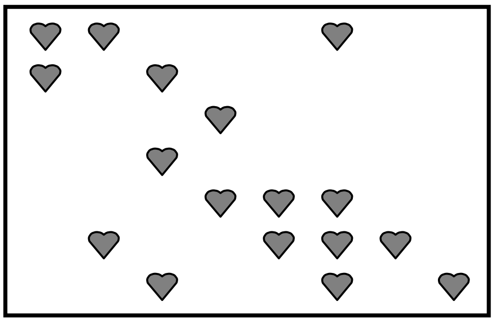
Nº titre	3	4	5	6	7	8
1. Les coeurs en chocolat	3					
2. Le village des animaux	3	4				
3. Les flaques	3	4				
4. Puzzle I	3	4				
5. Quel beau livre !	3	4	5			
6. Figures intéressantes		4	5			
7. Finale internationale		4	5			
8. Puzzle II			5	6		
9. Le nombre d'athlètes			5	6		
10. La récompense			5	6	7	
11. Le carré de Léa			5	6	7	
12. Bougres d'ânes				6	7	
13. Cartes rouges et cartes noires				6	7	8
14. La traversée du fleuve				6	7	8
15. Le vignoble					7	8
16. Les carrés d'Alex et François					7	8
17. Des sucettes à gogo						8
18. L'artisan						8
19. Course-poursuite						8

1. LES COEURS EN CHOCOLAT (Cat. 3)

À la St Valentin, Roméo a offert à Juliette des coeurs en chocolat, alignés très régulièrement dans leur boîte.
Le lendemain, la gourmande Juliette constate qu'elle en a déjà mangé plus de la moitié.
La figure montre les coeurs qui restent dans la boîte.



Combien de coeurs Juliette a-t-elle déjà mangés ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : alignement d'objets
- Arithmétique : addition, soustraction, multiplication

Analyse de la tâche

- Percevoir, d'après les objets qui restent, que les coeurs étaient disposés en lignes et colonnes.
- Déterminer le nombre de lignes et de colonnes, par passage d'un coeur à son voisin, en tenant compte parfois des voisinages en diagonale : 7 lignes et 8 colonnes.
- Calculer le nombre de coeurs dans la boîte pleine : 56 (par multiplication ou additions itérées), et soustraire le nombre de coeurs qui restent (17) et trouver que Juliette a déjà mangé 39 (56 – 17) coeurs.

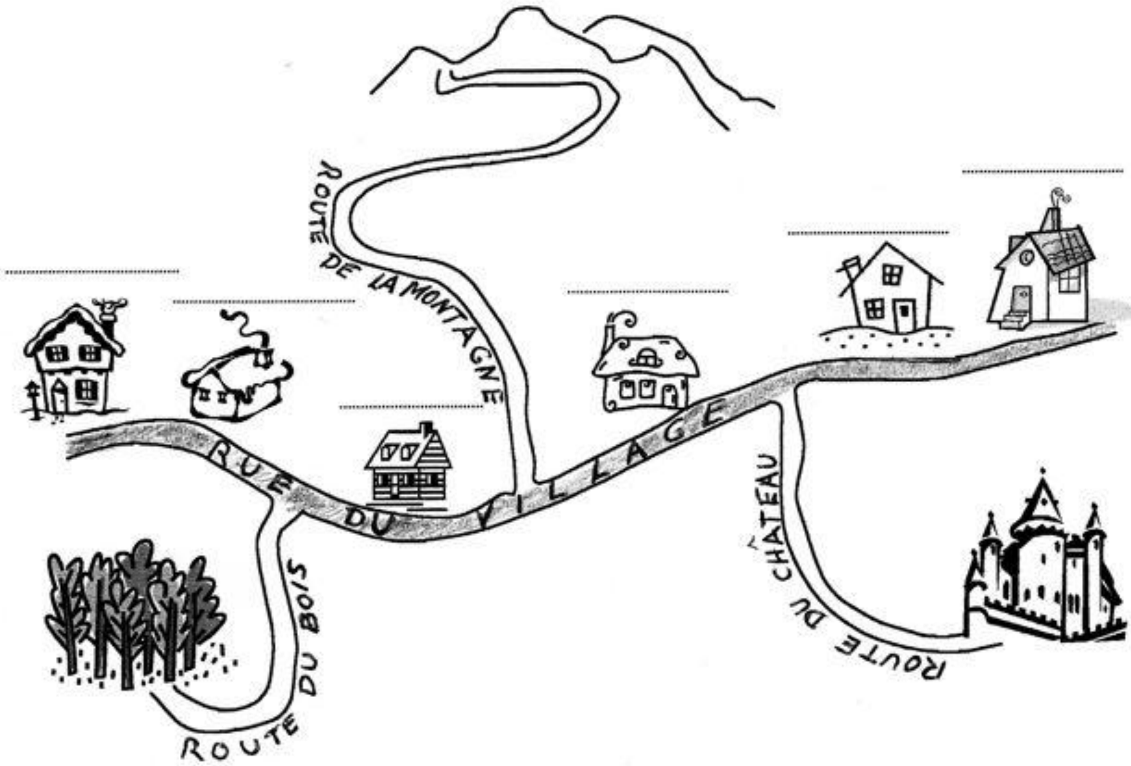
Ou : dessiner les chocolats qui manquent et les compter ; ce qui exige un alignement précis respectant le parallélisme (en particulier pour les régions de gauche et en haut à droite) ou le tracé de lignes.

Niveau : 3
Origine : *Chocolats* 7e RMT.I.1

2. LE VILLAGE DES ANIMAUX (Cat. 3, 4)

Écureuil, Hérisson, Marmotte, Taupe, Lièvre et Lapin ont chacun leur maison dans le village des animaux.

Voici une carte de ce village : on voit la rue du village qui relie les maisons des six animaux et les trois routes qui viennent du château, de la montagne et du bois.



Tous savent que :

- Lorsqu'on vient du château, si on tourne à gauche en arrivant sur la rue du village et en la suivant jusqu'au bout, on ne passe pas devant les maisons de Hérisson et de Lièvre.
- La première maison qu'on rencontre en venant de la montagne et en tournant à droite en arrivant sur la rue du village est celle de Lapin.
- Hérisson et Écureuil habitent dans les maisons qui sont aux deux bouts de la rue du village.
- Lorsqu'on vient du bois et si on tourne à droite en arrivant sur la rue du village, on ne passe pas devant la maison de Marmotte.

Écrivez au-dessus de chaque maison le nom de l'animal qui y habite.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : orientation dans un plan, positions relatives et déplacements
- Logique : négation d'une proposition ; implications et déductions

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que pour comprendre les informations, on a besoin de se situer comme si on se déplaçait dans la rue, soit en orientant la carte, soit en suivant mentalement le parcours.
- Lire les informations et procéder par éliminations ou choix successifs des maisons des animaux.

  Par exemple, en prenant les informations dans l'ordre où elles sont données :

  À la première information, comprendre que Hérisson et Lièvre habitent dans les deux dernières maisons indiquées à droite sur la carte car on ne passe pas devant chez eux mais devant toutes les autres maisons ;

  De la deuxième information déduire que Lapin habite la troisième maison à partir de la gauche (à ce propos, il faut éviter de se situer dans la position du lecteur extérieur « devant » le dessin du village mais « à l'intérieur » du village réel, venant de la montagne, où « tourner à droite » correspond à un déplacement vers la gauche sur le dessin du point de vue du lecteur.)

La troisième information, combinée avec la première, permet de déduire que Hérisson habite la dernière maison à droite sur la carte et, par conséquent, que la deuxième maison depuis la droite est celle de Lièvre, et encore que la première maison à gauche sur la carte est celle de Écureuil.

La quatrième information permet de déterminer les occupants des deux dernières maisons : celle de Marmotte est la deuxième depuis la gauche parce qu' « on ne passe pas devant elle » et, par conséquent, Taupe habite dans la maison restante (la quatrième depuis la gauche).

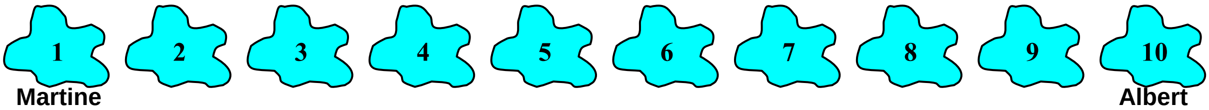
Niveaux : 3, 4

Origine : Siena

3. LES FLAQUES (Cat. 3, 4)

Martine et Albert jouent sous la pluie et s’amusent à sauter dans des flaques d’eau avec leurs bottes en caoutchouc. Devant leur maison, il s'est formé une file de 10 flaques.
Albert, en sautant, vient d’arriver dans la dernière.
Il propose à Martine de le rejoindre en suivant les mêmes règles que lui : « entre la flaque où tu es et celle dans laquelle tu sautes ensuite, il doit toujours y avoir une ou deux flaques, pas plus. Tu n’as pas le droit de revenir en arrière. »
Martine est dans la première flaque.

Trouvez et indiquez toutes les manières que Martine peut choisir pour rejoindre Albert.



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances :

- Arithmétique : déplacements sur la suite des entiers en utilisant les opérateurs « +2 » et « +3 »
- Combinatoire : permutations de trois sauts de 2 et d’un saut de 3

Analyse de la tâche :

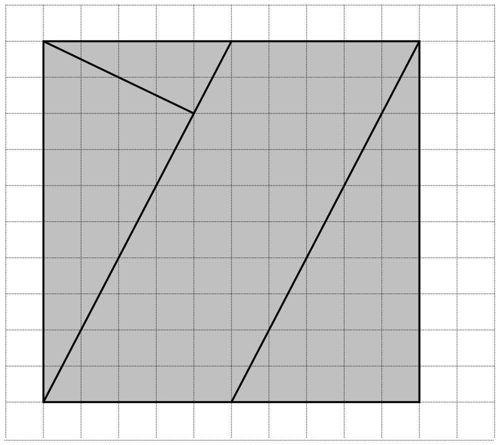
- Comprendre que Martine doit rejoindre la flaque 10 en faisant des sauts « de 2 » (en sautant une flaque intermédiaire) et/ou des sauts « de 3 » (en sautant deux flaques intermédiaires).
- Faire des essais avec des sauts de 2 ou de 3 flaques. Comprendre qu’un parcours avec seulement des sauts de 2 flaques n’est pas possible, car il ferait passer de la flaque 1 à la flaque 3 et ainsi de suite, n’atteignant que des flaques impaires.
- Remarquer que Martine peut faire trois sauts réguliers de 3 flaques.
- Se demander ensuite si on peut avoir des sauts mixtes de « 2 » et de « 3 » dans un même parcours et trouver que Martine peut faire trois sauts « de 2 » flaques et un « de 3 », avec quatre possibilités de placer le saut « de 3 ».
- En déduire les parcours possibles (on peut utiliser les numéros des flaques indiqués) :
  [1 3 5 7 10] – [1 3 5 8 10] – [1 3 6 8 10] – [1 4 6 8 10] – [1 4 7 10]
  ou toute autre représentation, par exemple une suite d’opérateurs : +2 +2 +2 +3 équivaut au premier parcours correct indiqué, +2 +2 +3 +2 ; +2 +3 +2 +2 ; +3 +2 +2 +2 ; +3 +3 +3 pour les autres parcours,
  ou en utilisant des flèches de différentes couleurs représentant les sauts successifs pour chaque parcours correct.

Niveaux : 3, 4

Origine : Milano

4. PUZZLE I (Cat. 3, 4)

Léo a reproduit sur une feuille de papier quadrillé le dessin que voici, puis il l'a découpé le long des lignes marquées et a obtenu les quatre pièces d'un puzzle.



En disposant autrement toutes ces pièces, il parvient alors à former un rectangle.

Dessinez ce rectangle le plus précisément possible ou collez le sur votre feuille-réponse, en faisant bien apparaître chacune des pièces.

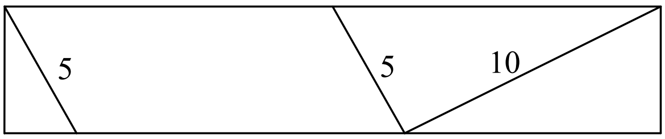
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : manipulation et observation de figures, images mentales (angle droit, rectangle)

Analyse de la tâche

- Observer les pièces, se rendre compte que pour faire le puzzle, il faut les découper soit sur le dessin proposé soit sur une reproduction très précise.
- Procéder par essais en déplaçant les pièces, en les glissant, les tournant sans les retourner, en identifiant en particulier les pièces qui permettent d'obtenir des angles droits et celles qui ont des côtés de mêmes longueurs pouvant s'accoler.
- D'une part constater que l'hypoténuse du petit triangle rectangle a même longueur que le petit côté du parallélogramme. En déduire que ces deux pièces s'assemblent bien pour former une partie d'un rectangle.
- D'autre part constater que les deux triangles rectangles assemblés par leurs côtés de même longueur (le côté du carré de départ) forment une autre partie du rectangle et que ces deux parties peuvent être assemblées.
- Reproduire le dessin ci-dessous ou coller le puzzle sur la feuille-réponse.



Niveaux : 3, 4

Origine : Bourg-en-Bresse

5. QUEL BEAU LIVRE ! (Cat. 3, 4, 5)

Jean doit lire un livre de 105 pages pour s'entraîner à la lecture.
Il décide de lire un peu chaque jour, sauf le mercredi car il va à la piscine, et le dimanche car il se repose.
Jean commence un lundi par lire une page, le lendemain, mardi, il lit deux pages puis, le jeudi, il lit une page de plus que le mardi, et ainsi de suite. Il lit chaque fois une page de plus que le nombre de pages lues la fois précédente.

Quel jour Jean aura-t-il fini de lire son livre : un lundi, un mardi, un jeudi, un vendredi ou un samedi ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : progressions arithmétiques, addition

Analyse de la tâche

- Comprendre les trois données présentes dans l'énoncé :
  Jean commence à lire un lundi ;
  Jean ne lit ni le mercredi, ni le dimanche ;
  Jean lit toujours une page de plus que le nombre de pages lues la fois précédente.
- Établir la progression des pages lues durant les jours de la semaine (sans confondre les numéros des pages lues jusqu'à ce jour avec le nombre de pages lues ce jour-là)
- Déterminer le total des pages lues, jour après jour, en additionnant les nombres successifs trouvés, et en utilisant éventuellement un schéma ou un tableau, pour atteindre la fin du livre (arriver à 105 pages).

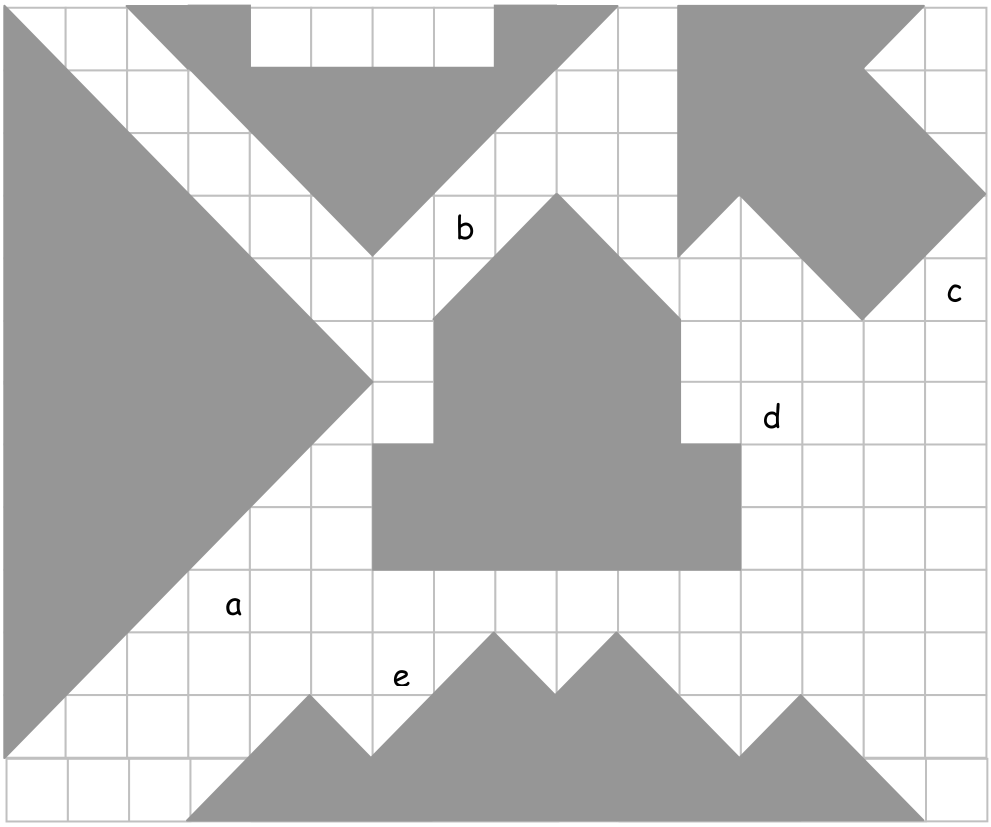
lundi	mardi	jeudi	vendredi	samedi
1 page	1 + 1 = 2 Total 3 pages lues	2 + 1 = 3 Total 6 pages lues	3 + 1 = 4 Total 10 pages	4 + 1 = 5 Total 15 pages
5 + 1 = 6 Total 21 pages	6 + 1 = 7 Total 28 pages	7 + 1 = 8 Total 36 pages	8 + 1 = 9 Total 45 pages	9 + 1 = 10 Total 55 pages
10 + 1 = 11 Total 66 pages	11 + 1 = 12 Total 78 pages	12 + 1 = 13 Total 91 pages	13 + 1 = 14 Total 105 pages	

- Conclure que Jean terminera la lecture de son livre un vendredi.

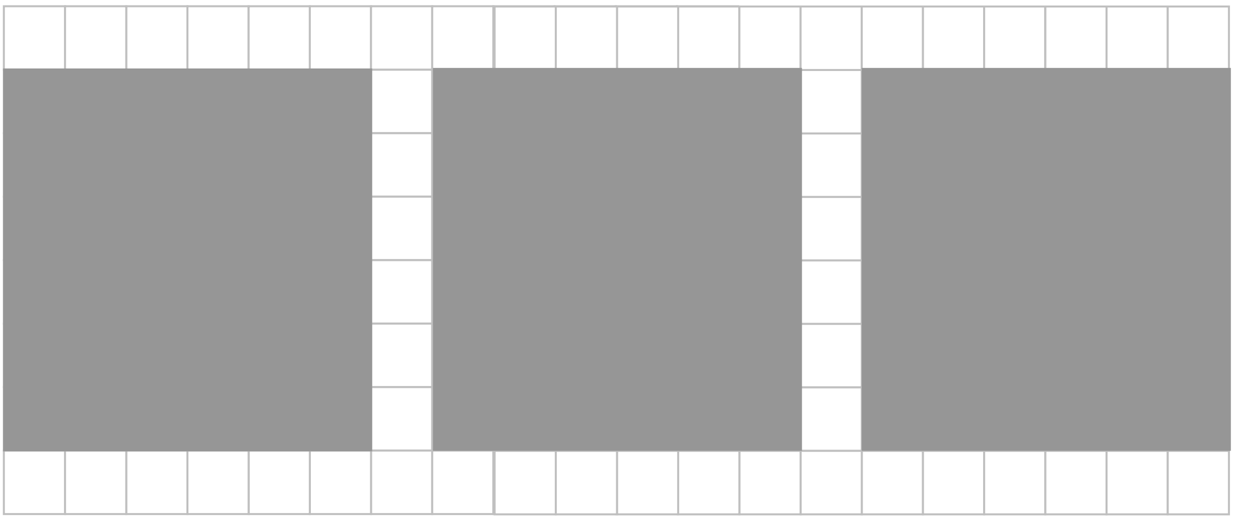
Niveaux : 3, 4, 5
Origine : Rozzano

6. FIGURES INTÉRESSANTES (Cat. 4, 5)

Louise a cinq formes en carton comme celles qui sont dessinées ci-dessous :



Louise prend une forme et elle la divise en deux parties égales d'un seul coup de ciseaux. Elle recommence avec les quatre autres formes.
Puis elle utilise les dix morceaux obtenus pour recouvrir exactement les trois carrés ci-dessous :



Vous aussi, faites comme Louise. Montrez comment vous recouvrez les trois carrés.

ANALYSE A PRIORI

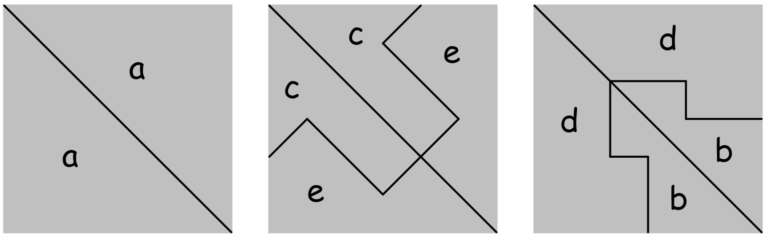
Domaine de connaissances :

Géométrie : le carré (composition et décomposition), reconnaissance de figures (symétrie axiale et identification de l'axe)

Analyse de la tâche:

- Pour chaque figure, repérer l'axe de symétrie et la découper soigneusement en deux parties identiques.

- Procéder ainsi, par exemple :
  Comprendre qu'avec les 2 triangles obtenus à partir de la figure a on peut recouvrir un carré.
- Se rendre compte, qu'un second carré peut être recouvert en utilisant les deux parties du morceau c (qui bien qu'il ait été divisé doit être recomposé comme avant) et les deux parties du morceau e.
- En déduire que le troisième carré sera recouvert par les quatre pièces obtenues en découpant les morceaux b et d.



(On peut obtenir d'autres solutions, non symétriques en assemblant *ace*, ou *adb*, ou *cebd*.

Ou : calculer le nombre de petits carrés contenus dans le carré à recouvrir (36). Trouver dans les autres figures le nombre de petits carrés qui les composent en mettant ensemble deux demi-carrés pour en faire un si nécessaire. Trouver que la figure *b* est constituée de 12 petits carrés, la figure *c* de 16, la figure *d* de 24 et la figure *e* de 20.

- Comprendre qu'on doit mettre ensemble *d* avec *b* et *c* avec *e* pour pouvoir avoir deux carrés de 36 petits carrés.

Ou : procéder par essais et ajustement en cherchant à recouvrir chacun des 3 carrés avec les pièces découpées.

Niveaux : 4, 5

Origine : Siena

7. FINALE INTERNATIONALE (Cat 4, 5)

Voici pour chaque pays le nombre des élèves qui ont participé à la Finale des finales du 16e Rallye mathématique transalpin qui s'est tenue en 2008 à Brigue, en Suisse.

Belgique : 19
France : 43
Italie : 110
Luxembourg : 21
Suisse : 55

Parmi ces participants, il y avait 121 garçons.
Parmi les filles, 80 ne venaient pas d'Italie.

Combien y avait-il de garçons venant d'Italie ?

Donnez le détail de vos calculs.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : soustraction et addition
- Logique : disjonctions et négations, représentation d'ensembles, organisation d'un raisonnement en plusieurs étapes

Analyse de la tâche

- Organiser les données en se représentant les différentes parties de l'ensemble des participants, selon les critères croisés : genre (fille / garçon) et pays (Belgique, France, Italie, Luxembourg, Suisse).
- Calculer successivement : le nombre total des participants : 19 + 43 + 110 + 21 + 55 = 248
  le nombre des filles : 248 – 121 = 127
  le nombre des filles qui venaient d'Italie : 127 – 80 = 47
  le nombre des garçons qui venaient d'Italie : 110 – 47 = **63.**

Ou, calculer successivement : le nombre de participants non italiens, 19 + 43 + 21 + 55 = 138
  le nombre de garçons non italiens, 138 – 80 = 58
  le nombre de garçons venant d'Italie, 121 – 58 = **63.**

Ou : représenter l'ensemble des participants par un tableau à double entrée et calculer les effectifs de différentes cases, du type :

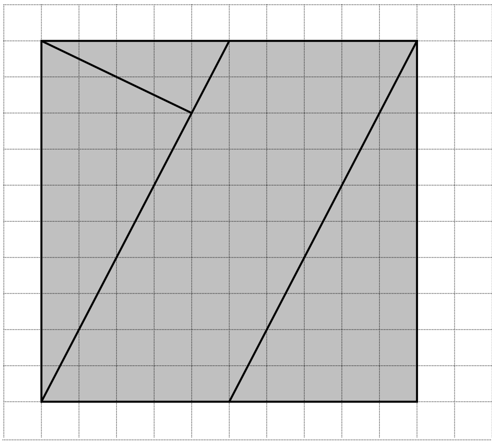
	BE	F	I	LU	CH	Total	non-I
Participants :	19	43	110	21	55	248	138
garçons			**63**			121	58
filles			47			127	80

Niveaux : 4, 5

Origine : FJ, préparation de la Finale internationale

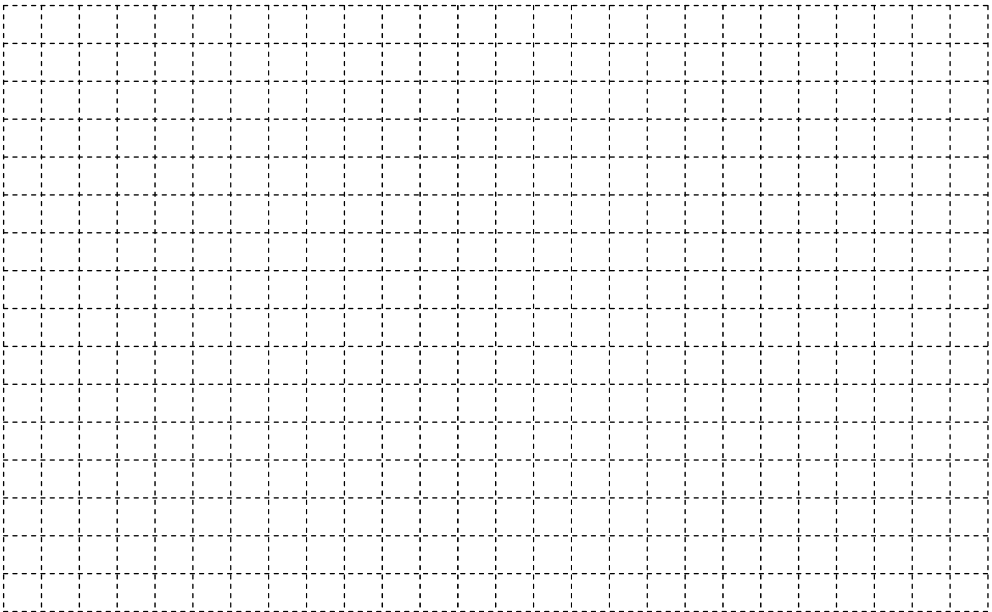
8. PUZZLE II (Cat. 5, 6)

Léo a reproduit sur une feuille de papier quadrillé le dessin que voici, puis il l'a découpé le long des lignes marquées et a obtenu les quatre pièces d'un puzzle constitué de trois triangles rectangles et un parallélogramme.



En assemblant d'une autre manière ces quatre pièces, Léo réussit à former un rectangle.

Dessinez ce rectangle dans le quadrillage donné ci-dessous, de manière à ce que tous les sommets des quatre pièces soient situés précisément sur les intersections de ses lignes.



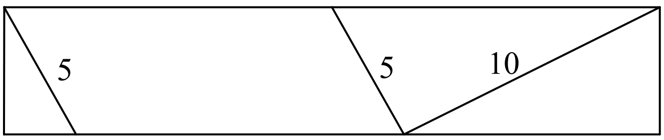
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

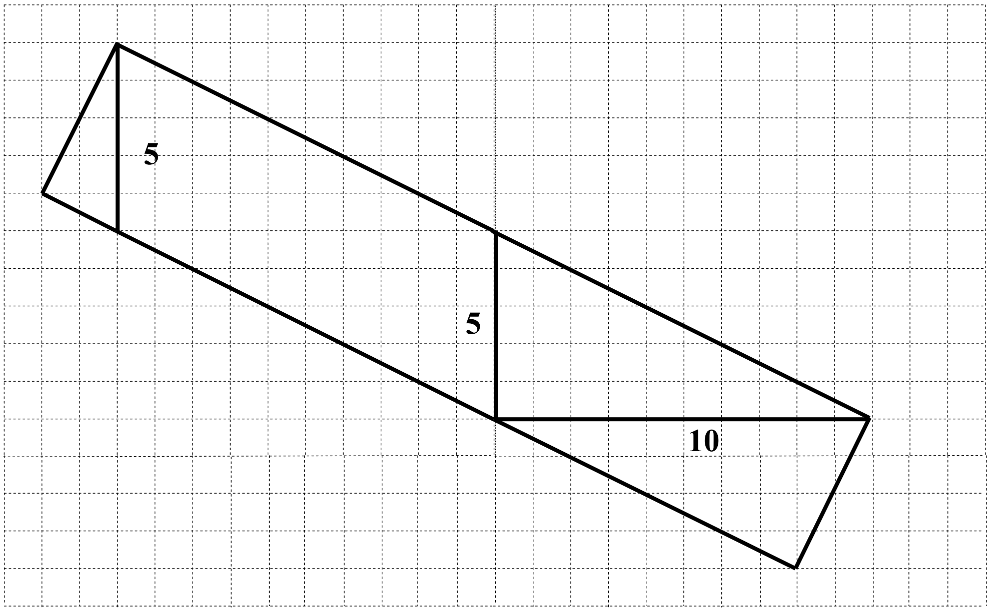
- Géométrie : manipulation et observation de figures, images mentales (angle droit, rectangle), localisation dans un quadrillage

Analyse de la tâche

- Observer les pièces, se rendre compte que pour faire le puzzle, il faut les découper soit sur le dessin proposé soit sur une reproduction très précise.
- Procéder par essais en déplaçant les pièces, en les glissant, les tournant sans les retourner, en identifiant en particulier les pièces qui permettent d'obtenir des angles droits et celles qui ont des côtés de mêmes longueurs pouvant s'accoler.
- Constater que l'hypoténuse du petit triangle rectangle a même longueur que le petit côté du parallélogramme. En déduire que ces deux pièces s'assemblent bien pour former une partie d'un rectangle.
- Compléter le rectangle avec les deux triangles rectangles assemblés par leurs côtés de même mesure (le côté du carré de départ).
- Vérifier que la figure obtenue est un rectangle : par perception globale et reconnaissance de propriétés (quadrilatère avec deux angles droits consécutifs et deux côtés opposés de même mesure).



- Reproduire le dessin dans le quadrillage donné (on peut utiliser les reports de longueurs entières de mailles repérées sur le carré donné) :



Niveaux : 5, 6

Origine : Bourg-en-Bresse

9. LE NOMBRE D'ATHLÈTES (Cat. 5, 6)

Alexandre, Julie, Luc et Daniel sont allés assister aux épreuves sportives des jeux de la jeunesse de leur région. Assis dans les tribunes du stade, ils ont eu l'idée de compter tous les athlètes.
Alexandre en a compté 238, Julie en a compté 227, Luc 214 et Daniel 210.
Malheureusement, comme ils ne pouvaient pas se déplacer, ils ne sont pas arrivés à compter avec précision.
Effectivement, tous les quatre enfants ont fait des erreurs en comptant : l'un s'est trompé de 5 unités, un autre de 8, un autre de 12 et un autre de 16.

Combien d'athlètes ont véritablement participé à ces jeux ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre solution.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique: additions, soustractions
- Logique: déductions, organisation des données et des résultats

Analyse de la tâche

- Comprendre que « l'erreur » peut être par excès ou par défaut
- Soustraire et ajouter à chacun des nombres les « erreurs » en organisant les données dans un tableau du type :

	-5	+5	-8	+8	-12	+12	-16	+16
238	233	243	230	246	226	250	**222**	254
227	**222**	232	219	235	215	239	211	243
214	209	219	206	**222**	202	226	198	230
210	205	215	202	218	198	**222**	194	226

- Se rendre compte que pour chacun des nombres erronés on retrouve à chaque fois le nombre 222 qui correspond à 238 moins 16, à 227 moins 5, à 214 plus 8 et à 210 plus 12.

On peut aussi :

- Faire l'hypothèse qu'on devra enlever une quantité au nombre le plus grand et en ajouter une au nombre le plus petit, par conséquent le nombre qu'on cherche est compris entre 210 et 238.
- Vérifier qu'en ajoutant les « erreurs » aux nombres les plus petits et en les soustrayant aux nombres les plus grands, on tombe sur le nombre 222.

	-5	+5	-8	+8	-12	+12	-16	+16
238	233		230		226		**222**	
227	**222**		219		215		211	
214		219		**222**		226		230
210		215		218		**222**		226

On peut encore :

- Procéder par essais organisés : par exemple, supposer qu'à 238 on doit soustraire le nombre le plus grand (-16) et faire l'hypothèse que le nombre recherché soit 222 ; voir si c'est possible d'obtenir le même résultat à partir des autres nombres, ajoutant ou soustrayant les « erreurs ».

Ou : supposer que le nombre cherché soit 222 (par exemple en effectuant la moyenne arithmétique du nombre des athlètes comptés par les quatre amis (238 + 227 + 214 + 210) : 4 = 222,5) et attribuer chaque écart à chaque nombre trouvé. On obtient donc 238 – 16, 227 – 5, ... , 214 + 8, ... , 210 + 12, ce qui confirme l'hypothèse.

Niveaux : 5, 6

Origine : Udine

10. LA RÉCOMPENSE (Cat. 5, 6, 7)

À la fin d'un entraînement de mini basket, l'entraîneur désire répartir le contenu d'un sac de bonbons entre les enfants de son équipe. Il souhaite que chaque enfant en reçoive le même nombre.

Il commence par distribuer un bonbon à chacun.

Après ce premier tour, il en fait un deuxième, donnant encore un bonbon à chacun.

Mais juste avant de faire un troisième tour, il s'aperçoit qu'il lui manque 5 bonbons pour le terminer. Alors il arrête la distribution et il lui reste 9 bonbons dans le sac.

Combien y avait-il de bonbons dans le sac avant la distribution ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations, multiples et diviseurs

Analyse de la tâche

- Comprendre que chaque enfant a reçu deux bonbons.
- Chercher à comprendre combien ils sont dans l'équipe, et comprendre qu'ils doivent être plus de 5 si on porte son attention sur les bonbons qui manquent pour compléter le troisième tour, ou qu'ils sont plus de 9 si on porte son attention sur les bonbons qui restent après le deuxième tour.
- Se rendre compte que la somme des bonbons manquants au troisième tour avec ceux qui sont en trop après le deuxième tour, est égale au nombre d'enfants qui composent l'équipe : 9 + 5 = 14. En effet, il lui reste 9 bonbons après le deuxième tour et il lui en manque 5 pour finir le troisième tour. On peut alors retrouver le nombre de bonbons qui se trouvaient dans le sac : 3 × 14 – 5 = 37.

  Éventuellement, on peut s'aider d'un schéma de ce type où l'on distribue un bonbon par tour à chaque enfant.

  premier tour xxxxxxx………xxxxx

  deuxième tour xxxxxxx………xxxxx

  troisième tour $\underbrace{\text{xxxxxxxxx}}_{\text{9 bonbons}}$ { } 5 bonbons manquants

- Déduire que le nombre de bonbons du sac était initialement de (14 × 2) + 9 = 37 [ou (14 x 3) – 5 = 37].

Ou procéder par essais : par exemple, considérer qu'ils sont plus de 9. En faisant l'hypothèse qu'il y en a 10, alors il y aura 25 bonbons distribués car (10 × 3) – 5 = 25. Dans ce cas, en donnant deux bonbons à chacun, il en resterait 5 et pas 9 pour le troisième tour. Essayer avec 11 [(11 × 3) – 5 = 28] mais ainsi, après le second tour, il en resterait 28 –22 = 6 ; … continuer ainsi jusqu'à 14 : (14 × 3) – 5 = 37 et 37 – (14 × 2) = 9.

Construire éventuellement un tableau pour reporter les calculs.

- Conclure qu'il y a14 enfants et 37 bonbons. S'assurer qu'il n'y a pas d'autre(s) solution(s), vérifier que si on augmente le nombre des enfants, le reste après la deuxième distribution augmente à son tour.

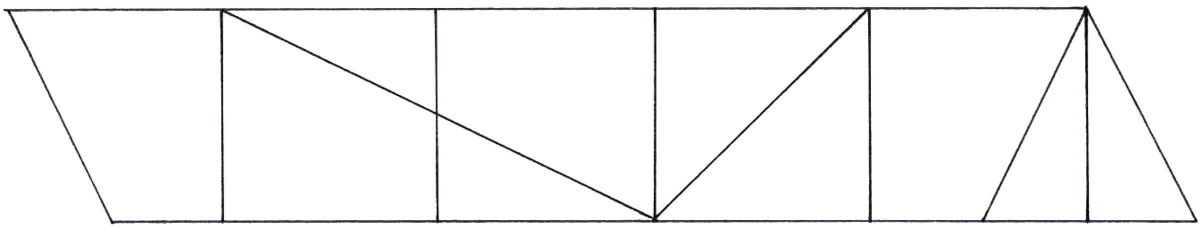
(Aux niveaux 5 et 6, on ne peut pas attendre une solution algébrique.)

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Siena

11. LE CARRÉ DE LÉA (Cat. 5, 6, 7)

Léa a trouvé dans le grenier de sa maison une vieille boîte contenant 10 figures géométriques en bois : 4 triangles rectangles non isocèles, 2 triangles rectangles isocèles et 4 trapèzes rectangles. Avec toutes ces figures Léa a formé ce parallélogramme :



Léa se demande si elle peut former d'autres figures géométriques.

Aidez-là à reconstituer :

- 1 losange en utilisant 8 pièces bien choisies parmi les 10.

- 1 trapèze rectangle en utilisant 8 pièces bien choisies parmi les 10.

- 1 carré en utilisant l'ensemble des 10 pièces.

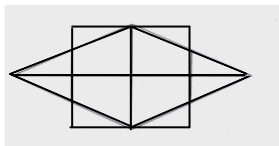
ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

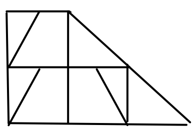
- Géométrie : décomposition et recomposition d'une surface plane en triangles et trapèzes. Comparaisons de longueurs et d'angles. Rotation et symétrie axiale.

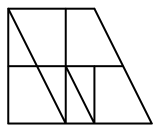
Analyse de la tâche

- Comprendre quelles sont les figures à découper.
- Découper les figures et essayer de les accoler en faisant coïncider les côtés égaux.
- Se rendre compte qu'avec 8 figures :
    - on peut obtenir le losange en construisant, par exemple, d'abord un triangle rectangle (avec un trapèze et un triangle rectangle non isocèle) et en procédant ensuite par symétrie ; ou bien, en partant d'un hexagone convexe (obtenu avec les quatre trapèzes rectangles) et en ajoutant ensuite, convenablement, les quatre triangles rectangles non isocèles ;

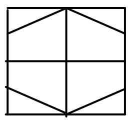


    - on peut construire deux trapèzes rectangles différents, par exemple, en fixant son attention sur le moyen d'obtenir son côté oblique (par alignement des côtés obliques de deux trapèzes ou des hypoténuses de deux triangles rectangles du même type) et en complétant convenablement.

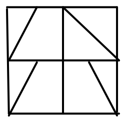




Ou bien : remarquer qu'en réunissant correctement deux à deux les figures données, on obtient cinq carrés (l'un formé de deux triangles rectangles isocèles, les quatre autres formés d'un triangle rectangle non isocèle et d'un trapèze). Avec quatre de ceux-ci, on forme deux types de puzzles carrés de 8 pièces, le second utilisant les deux triangles rectangles isocèles (cf. *a* et *b*)

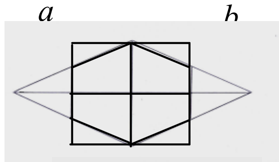


a

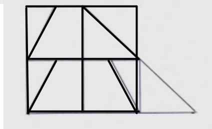


b

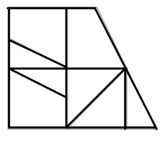
- Dans le cas *a*, on peut former le losange en disposant correctement les quatre triangles rectangles non isocèles, comme sur la figure (le quadrilatère obtenu est bien un losange, car il a deux axes de symétrie orthogonaux, et 4 côtés de même longueur).



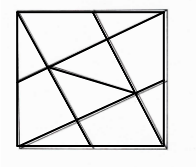
- Dans le cas *b,* on peut former le grand trapèze rectangle en disposant correctement un des deux triangles rectangles isocèles, comme sur la figure (le parallélisme et les angles droits sont assurés par la configuration des 4 carrés initiaux).



- ou bien obtenir un autre trapèze en assemblant deux trapèzes rectangles avec deux triangles rectangles non isocèles, complétés par un trapèze et les deux triangles rectangles isocèles formant un carré comme sur la figure.



- Se rendre compte qu'avec les 10 figures, on peut obtenir le grand carré en disposant en « position centrale » un petit carré formé des deux triangles rectangles isocèles et en le complétant par les quatre trapèzes rectangles « en tournant » autour du carré central et en terminant avec les quatre triangles rectangles restants, comme sur la figure.



Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Lodi

12. BOUGRES D'ÂNES (Cat. 6, 7)

Boris doit transporter 500 carottes jusqu'au village voisin distant de 19 km. Il possède deux ânes, Cadichon et Bourricot, qui n'avancent qu'en mangeant des carottes :

- Cadichon s'arrête tous les 4 km. Au premier arrêt à 4 km du départ, il mange une carotte et repart. Au second arrêt, après 8 km, il mange le double de carottes de son arrêt précédent, c'est-à-dire deux, et ainsi de suite : à chaque arrêt, il mange le double du nombre de carottes mangées à l'arrêt précédent.
- Bourricot s'arrête tous les 5 km. Au premier arrêt à 5 km du départ, il mange une carotte, puis au second arrêt, après 10 km, il en mange le triple c'est-à-dire trois, et ainsi de suite : à chaque arrêt, il réclame le triple de la ration reçue à l'arrêt précédent.

Quel âne Boris doit-il choisir pour conserver le plus possible de carottes en arrivant au village ? Combien de carottes lui reste-t-il ?

Si le voyage devait se poursuivre après le village, quel âne serait-il le plus avantageux ?

Expliquez votre démarche et vos résultats.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication et addition de nombres naturels, suites

Analyse de la tâche

- Comprendre la règle de croissance des rations de carottes pour les deux ânes (doubler à chaque arrêt pour Cadichon et tripler pour Bourricot),
- Calculer la somme des carottes mangées par chaque âne à chaque arrêt et noter les résultats dans un tableau comme celui-ci :

Cadichon :

numéro de l'arrêt	1	2	3	4	Village	5	6
distance (km)	4	8	12	16	19	20	24
carottes pour l'arrêt	1	2	4	8		16	32
total des carottes	1	3	7	15	**15**	31	63

Bourricot :

numéro de l'arrêt	1	2	3	Village	4	5
distance (km)	5	10	15	19	20	25
carottes pour l'arrêt	1	3	9		27	81
total des carottes	1	4	13	**13**	40	121

- Mettre en relation les nombres totaux de carottes mangées et les kilomètres parcourus pour constater qu'à 19 km, Cadichon, a mangé 15 carottes (comme à 16 km) et que Bourricot n'a mangé que 13 carottes (comme à 15 km). Boris doit donc choisir Bourricot pour aller au village. Il lui reste alors 487 carottes.
- Après le 20e km, Bourricot a mangé 40 carottes et Cadichon seulement 31. Bourricot n'est avantageux que sur une distance inférieure à 20 km.

Niveaux : 6, 7

Origine : Lyon

13. CARTES ROUGES ET CARTES NOIRES (Cat. 6, 7, 8)

Mario joue à un jeu de solitaire avec un paquet de cartes rouges et de cartes noires.
Les règles du jeu sont les suivantes :

- On commence par disposer sur la table 6 cartes rouges et 6 cartes noires, le reste du jeu s'appelle la pioche.
- À chaque coup, on peut retirer de la table soit une carte, soit deux cartes en même temps, en respectant les conditions suivantes :
  - si on retire une seule carte rouge, on doit remettre deux autres cartes rouges sur la table en les prenant dans la pioche ;
  - si on retire deux cartes rouges en même temps, on doit remettre sur la table une carte noire prise dans la pioche ;
  - si on retire une seule carte noire, on doit remettre sur la table une autre carte noire prise dans la pioche ;
  - si on retire deux cartes noires en même temps, on ne doit rien remettre sur la table.
- La partie se termine quand il ne reste plus de cartes sur la table.

Mario aimerait réussir son solitaire en un minimum de coups.

Indiquez le nombre et la suite des coups à jouer pour faire une partie le plus rapidement possible.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Logique : contrôle de plusieurs conditions en même temps ; raisonnement hypothético-déductif ; développement d'une stratégie qui minimise le nombre de coups

Analyse de la tâche

- Essayer de jouer une partie, réelle ou virtuelle, pour comprendre les règles du jeu et les appliquer, éventuellement en s'aidant d'une représentation des coups autorisés, du type :

R→RR	N→N
RR→N	NN→//

- Se rendre compte que, pour pouvoir finir le solitaire, il faut éliminer les cartes rouges de telle sorte qu'il ne reste qu'un nombre pair de cartes noires sur la table.
- Considérer qu'en partant de 6 cartes noires et 6 cartes rouges, les six cartes noires peuvent être éliminées en **trois coups** (NN→//, NN→// et NN→//).
- Pour les cartes rouges, comprendre qu'en les éliminant deux par deux, on devrait prendre en échange trois cartes noires dont deux pourraient ensuite être éliminées en un coup, mais il resterait une carte noire qui ne permettrait plus de finir le solitaire.
- Changer alors de stratégie et considérer que quatre cartes rouges peuvent être éliminées en **trois coups**. En effet, en deux coups (RR→N et RR→N) on obtient deux cartes noires qui, avec un troisième coup, s'éliminent ensemble (NN→//). Il reste alors deux cartes rouges. Pour chacune d'elles, on obtient une carte noire en deux coups (R→RR et RR→N) et l'on élimine enfin les deux cartes noires avec un dernier coup (NN→//), ce qui ajoute au total **cinq autres coups**.
- En déduire que le nombre minimum de coups qui permettent de terminer le solitaire est 11.

Niveaux : 6, 7, 8
Origine : Siena

14. LA TRAVERSÉE DU FLEUVE (Cat. 6, 7, 8)

Un groupe de touristes, de 100 à 200 personnes, doit traverser un grand fleuve, mais le seul pont possible a été détruit par les intempéries. Cependant, deux barques sont disponibles : une petite et une grande.

Avec la petite, utilisées au complet à chaque voyage, tous les touristes pourraient traverser le fleuve en 21 voyages.

Avec la grande, utilisée au complet aussi à chaque voyage, tous les touristes pourraient traverser le fleuve, en 9 voyages seulement.

Après 5 voyages de chacune des deux barques, il reste encore des touristes à transporter. Selon vous, combien ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique : multiples communs, fractions (additions)

Analyse de la tâche

- Se rappeler que le nombre de touristes est compris entre 100 et 200.
- Comprendre que ce nombre est un multiple commun de 21 et de 9, donc de 63.
- Trouver les multiples de 63 compris entre 100 et 200. Il y en a deux : 126 et 189.
- Considérer que si les touristes sont 126, avec la petite barque, on pourra transporter 6 touristes (126 : 21) à chaque voyage, et avec la grande barque 14 touristes (126 : 9) à chacun des voyages.
- Calculer alors qu'après 5 voyages des deux barques, 100 touristes ont pu traverser ($6 \times 5 = 30$ et $14 \times 5 = 70$), il en reste donc 26 à transporter.
- Même raisonnement pour le cas de 189 touristes : avec la petite barque, on peut transporter 9 touristes (189 : 21) à chaque voyage, et avec la grande barque 21 touristes (189 : 9) à chacun des voyages. Après 5 voyages des deux barques, 150 touristes ont pu traverser ($9 \times 5 + 21 \times 5 = 150$), il en reste donc 39 à transporter.

Ou, en utilisant des fractions :

- Se rendre compte que le nombre de touristes transporté par voyage de la petite barque est 1/21 du total, alors que, pour la grande barque, c'est 1/9. Après 5 voyages des deux barques, le nombre total des touristes transportés est $5/21 + 5/9 = 50/63$ du total.
- Comprendre que le nombre total des touristes doit être un multiple de 63, compris entre 100 et 200 : 126 ou 189.
- Calculer pour les deux cas, le nombre des touristes encore à transporter ($1 - 50/63 = 13/63$) $126 \times 13/63 = 26$ ou $189 \times 13/63 = 39$.

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Ticino

15. LE VIGNOBLE (Cat. 7, 8)

C'est l'automne, le temps des vendanges. Robert possède un vignoble de 2500 mètres carrés cultivé en raisin « merlot ».

Comme chaque année, il doit livrer son raisin au pressoir de la cave locale. Celle-ci n'accepte que 150 quintaux (1 quintal = 100 kg) par hectare (10 000 m^2) de raisin « merlot ».

Robert doit donc supprimer sur chaque plant les grappes inutiles et permettre ainsi un mûrissement optimal des grappes qui restent.

Il a 500 plants de vigne sur son terrain. Il sait que, arrivée à maturité, une grappe pèse en moyenne entre 200 et 250 grammes.

Combien de grappes Robert peut-il laisser sur chaque plant pour ne pas dépasser les limites imposées par la cave ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique : division, proportionnalité, encadrements

Analyse de la tâche

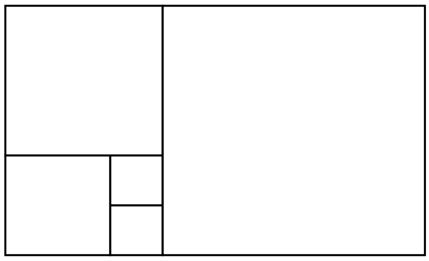
- Remarquer que si 1 hectare peut fournir au maximum 150 quintaux de raisin « merlot », alors 2500 m² pourront produire 150 : 4 = 37,5 quintaux, soit 3750 kg.
- Comme dans la propriété de Robert il y a 500 plants de vigne, chacun pourra porter en moyenne 3750/500 = 7,5 kg de raisin.
- Pour connaître le nombre de grappes à laisser sur chaque plant, il convient de faire le calcul dans les deux cas limites, vu qu'une grappe peut peser de 200 à 250 grammes.
- Pour des grappes de 250 grammes, chaque pied de vigne peut porter en moyenne 7500 : 250 = 30 grappes et pour des grappes de 200 grammes, chaque pied de vigne peut porter en moyenne 7500 : 200 = 37,5 grappes, arrondis à 37 (ou 38).
- Conclure que chaque pied de vigne pourra porter entre 30 et 37 (ou 38) grappes.

Niveaux : 7, 8

Origine : Riva del Garda

16. LES CARRÉS D'ALEX ET FRANÇOIS (Cat. 7, 8)

Alex et François considèrent la figure suivante représentant un grand rectangle formé de 5 carrés.
Alex affirme que s'il connaît le périmètre du rectangle, il peut calculer son aire et il donne un exemple avec un périmètre de 130 cm.
François prétend qu'il peut calculer le périmètre du rectangle à partir de son aire et il donne un exemple avec une aire de 1440 cm^2.



Quelle est l'aire calculée par Alex et quel est le périmètre obtenu par François.

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : rectangle et carré.
- Grandeurs et mesures : mesures de périmètres et aires.

Analyse de la tâche

- Observer que le rectangle est formé de 5 carrés : deux petits carrés dont les côtés peuvent être pris comme unité de longueur, un carré de côté double, un carré de côté triple et un grand carré de côté 5 unités.
- Remarquer que le rectangle a pour périmètre $2 \times (5 + 8) = 26$ (en unités) et qu'il contient $2 + 4 + 9 + 25 = 40$ carrés unité.
- Puisque le périmètre d'Alex vaut 130 cm, il a pris $130/26 = 5$ (en cm) pour côté d'un carré unité qui a donc une aire de 25 (en cm^2) et dans l'exemple d'Alex, le rectangle a une aire de $25 \times 40 = 1000$ (en cm^2).
- Puisque l'aire de François vaut 1440 (en cm^2), il a pris dans son exemple $1440/40 = 36$(en cm^2) pour aire d'un carré unité et 6 cm comme unité de longueur. Le périmètre du rectangle qu'il doit donner est donc $26 \times 6 = 156$ cm.

Niveaux : 7, 8

Origine : Ticino

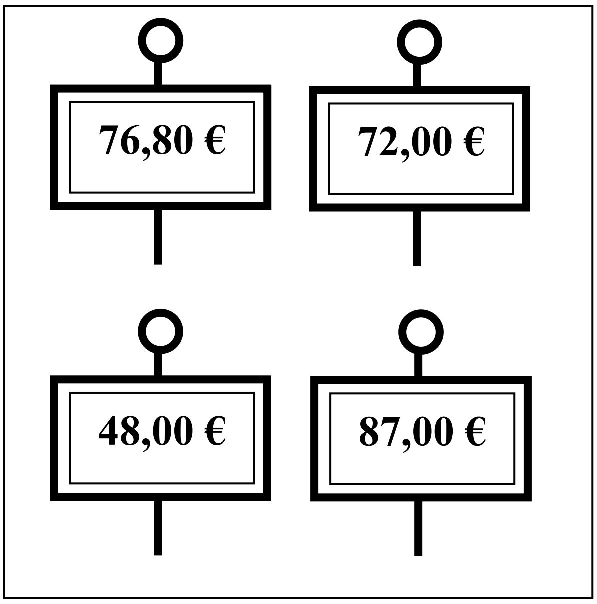
17. DES SUCETTES A GOGO (Cat. 8)

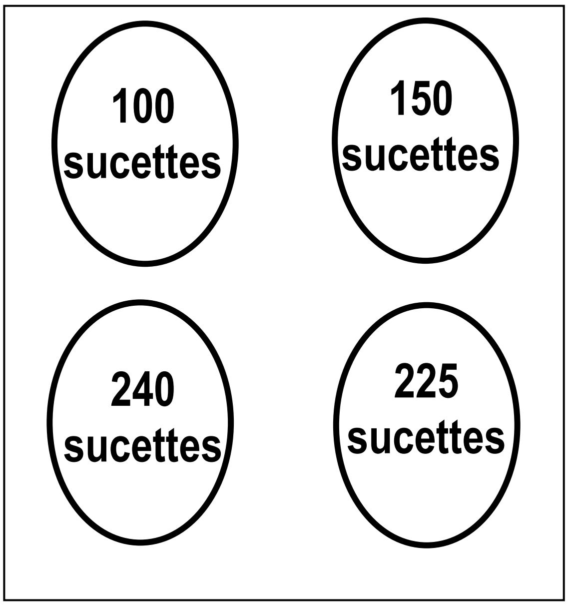
Un commerçant a préparé 4 lots de sucettes : un lot de 100 sucettes, un de 150, un de 225, et un de 240.

Il veut indiquer le prix de chaque lot, sachant que le prix d'une sucette est le même dans tous les lots. Pour cela, il veut utiliser les étiquettes ci-dessous. Mais en calculant les prix à inscrire, il s'est trompé pour l'une d'entre elles.

Corrigez l'étiquette fausse et attribuez à chaque lot l'étiquette qui lui revient.

Expliquez votre réponse.





ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : proportionnalité

Analyse de la tâche

- Comprendre que le prix d'un lot et le nombre de ses sucettes sont des grandeurs directement proportionnelles puisqu'on sait que le prix d'une sucette est le même dans tous les lots.
- Remarquer que puisqu'une des étiquettes est fausse, le plus petit prix ne correspond pas nécessairement au plus petit lot, ni le plus grand au lot le plus important.
- Faire l'hypothèse que le lot de 100 sucettes coûte 48 €, ce qui fait 48 centimes la sucette. Calculer les prix des autres lots sur cette base : 150 sucettes devraient coûter 72 €, 225 sucettes devraient coûter 108 € et 240 sucettes devraient coûter 115,2 €. Constater par conséquent que cette hypothèse conduit à une contradiction car on sait qu'une seule étiquette est fausse. En déduire que l'étiquette 48 € ne convient pas pour le lot de 100 sucettes.
- Faire une hypothèse sur le prix d'un autre lot et la tester en calculant les prix des lots restants. Trouver que seule l'hypothèse 150 sucettes coûtent 48 € convient, et qu'alors 225 sucettes coûtent 72 € et 240 sucettes coûtent 76,80 €. En déduire le prix de 100 sucettes en utilisant le prix à l'unité (0,32 € / sucette). Conclure que l'étiquette 87 € est fausse et doit être remplacée par 32 €.

Ou : calculer les 16 prix des sucettes correspondant aux quatre lots et aux quatre étiquettes (dans un tableau 4 × 4 à double entrée par exemple) et constater que le seul prix qui apparaît trois fois est 0,32 et en déduire que les trois correspondances exactes sont (48/150 = 72/225 = 76,8/240 = 0,32) et qu'il faut recalculer le prix du lot de 100, qui est 32 €.

Niveau : 8

Origine : Bourg-en-Bresse

18. L'ARTISAN (Cat. 8)

Un artisan fabrique des objets en céramique dans son atelier. Aujourd'hui, il a préparé 13 vases qu'il désire vendre chacun à 24 €.
Malheureusement, certains d'entre eux se sont fendus au cours de la cuisson. L'artisan décide alors de vendre ceux qui restent en augmentant le prix de chaque vase d'autant de fois 3 € qu'il y a de vases fendus.
En procédant ainsi, la vente des vases qui restent lui procurera le même montant qu'il aurait obtenu en vendant les 13 vases prévus à 24 €.

Combien y a-t-il de vases fendus ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine conceptuel

Arithmétique : multiplication et division

Algèbre : règle d'annulation d'un produit ; équation du second degré ; système

Analyse de la tâche

- Comprendre que 312 € (= 13 × 24 €) est ce que l'artisan aurait gagné avec la vente de tous ses vases. C'est donc la somme qu'il veut tirer de la vente des vases qui restent non fendus.
- Se rendre compte que le nombre de vases non fendus est un diviseur de 312 inférieur à 13 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12.
- Effectuer la division de 312 par chacun d'eux et considérer les cas dans lesquels les quotients sont des multiples de 24 augmentés d'un multiple de 3. C'est le cas des divisions par 1, 4 et 8. Écarter 1 parce que 312 : 1 = 312 et 312 – 24 = 288 = 3 × 96, mais 96 ne, peut pas être le nombre des vases fendus.

Écarter de même 4 parce que 312 : 4 = 78 et 78 – 24 = 54 = 3 × 18, mais ce cas n'est pas non plus acceptable car 18 > 13. Trouver enfin que 312 : 8 = 39 et que 39 – 24 = 15 = 3 × 5, 8 est donc le nombre des vases restés en bon état.

- En déduire que le nombre de vases fendus est 5 (13 – 8).

Ou : construire un tableau comme le suivant :

Vases fendus	Vases en bon état	Produit de la vente
1	12	12 (24 + 3) = 324
2	11	11 (24 + 3 × 2) = 330
3	10	10 (24 + 3 × 3) = 330
4	9	9 (24 + 3 × 4) = 324
5	8	8 (24 + 3 × 5) = **312**
6	7	7 (24 + 3 × 6) = 294
7	6	6 (24 + 3 × 7) = 270

- Observer que le produit de la vente diminue quand le nombre de vases fendus augmente et arrêter la construction du tableau. Conclure que le produit de la vente de 312 € est obtenu avec 5 vases fendus.

Ou : Noter x le nombre de vases fendus et écrire l'équation $(13 - x)(24 + 3x) = 312$. Cette équation du second degré s'écrit : $3x^2 - 15x = 0$, d'où $3x(x - 5) = 0$ qui, par la règle d'annulation d'un produit, donne $x = 0$ ou $x = 5$. Éliminant la solution $x = 0$, conclure que le nombre de vases fendus est 5.

Ou : Noter x le nombre de vases fendus et y celui des vases en bon état. Obtenir le système des deux équations : $x + y = 13$ et $y(24 + 3x) = 13 \times 24$. Par substitution, en déduire l'équation à deux inconnues : $y(24 + 3x) = (x + y) \times 24$, d'où $3xy = 24x$. Comme $x \neq 0$, on obtient $y = 8$ et comme $x + y = 13$, on a $x = 5$.

Niveau : 8

Origine : Siena

19. COURSE-POURSUITE (Cat 8).

Georges et Frédéric font une course-poursuite sur une distance de 30 m, entre un arbre A et un arbre B.
Georges court à une allure régulière à la vitesse de 10,8 km/h, alors que Frédéric court à la vitesse régulière de 18 km/h.
Frédéric donne un avantage à Georges qui partira d'un point C situé entre les deux arbres, à 3 mètres de l'arbre A.
Frédéric part de l'arbre A exactement 3 secondes après le départ de Georges.

Qui va gagner la course ? Pendant combien de temps chacun aura-t-il couru ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique : rapports
- Mesures : vitesse, distance et temps
- Algèbre : fonctions

Analyse de la tâche

- Comprendre que Frédéric est plus rapide que Georges et que, si la distance entre les deux arbres est suffisante, il peut rejoindre son ami et le dépasser.
- Traduire en m/s les vitesses données : Georges parcourt 3 mètres par seconde (10 800/3600) et Frédérique 5 mètres par seconde (18 000/3600).
- Interpréter numériquement l'avantage accordé à Georges : il part du point C situé à 3 m de A et parcourt 9 mètres pendant les 3 secondes d'attente de Frédéric. Georges a donc 12 m d'avance quand Frédéric commence sa course.
- En déduire qu'il lui reste 18 m à parcourir avant l'arbre B, quand Frédéric part pour sa course de 30 m. Comme Georges fait 18 m en 6 secondes et Frédéric fait 30 m en 6 secondes, ils arriveront ensemble à l'arbre B, il n'y aura pas de gagnant. Georges aura couru en 9 secondes et Frédéric en 6 secondes.

Ou : écrire les deux fonctions correspondant aux courses de Georges et Frédéric, respectivement : CB = $V_G \times t_G$ et AB = $V_F \times t_F$, avec CB = 27 m, AB = 30 m, V_G = 3 m/s, V_F = 5 m/s. Le temps de parcourt de Georges est donc t_G = 9 s, celui de Frédéric est t_F = 6 s, mais comme Georges est parti 3 s avant Frédéric, ils arriveront ensemble à l'arbre B.

Niveau : 8

Origine : Milano