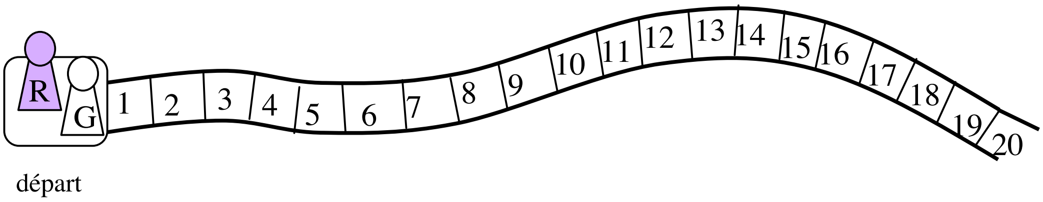
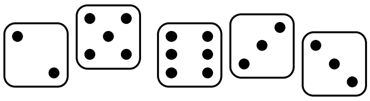
Nº titre	3	4	5	6	7	8	9	10	Ar.	Alg.	Ge	Lo.	Orig.
1. JEU DES CINQ DES	3								x			x	PR+FJ
2. DANS LE BUS	3	4							x				9RMT
3. PARTIES DE PING-PONG	3	4										x	FJ
4. CARRÉS AVEC OU SANS TROU	3	4									x		SR
5. BOÎTES	3	4	5								x		AO
6. LE JEU DU CANARD		4	5						x			x	AO
7. MOUSSE AU CHOCOLAT		4	5	6					x		x		LU
8. BONBONS AUX TROIS GOÛTS			5	6					x				SI
9. LE RÉVEIL			5	6					x				LY
10. JEU D'ANNIVERSAIRE			5	6	7							x	BE
11 LES DÉS PERDUS			5	6	7				x		x		UD
12. LE CHAMP DE GRAND-PÈRE				6	7	8					x		LO
13. DÉVELOPPEMENTS DE PYRAMIDE				6	7	8					x		FC
14. DRÔLE DE MULTIPLICATION					7	8	9		x	x			BL
15. LE BOUQUET					7	8	9	10	x	x			FC
16. FACTORIELLES					7	8	9	10	x				FJ
17 L'OLIVERAIE						8	9	10	x		x		RV
18. PETIT DÉJEUNER AUX CÉRÉALES						8	9	10	x				FJ
19. UN DIAMANT POUR GUINNESS							9	10			x		FC
20. SOLIDES PERCÉS							9	10	x	x	x		SI
21. PYRAMIDE								10	x	x	x		FJ

1. JEU DES CINQ DES (Cat. 3)



À ce jeu, on jette 5 dés et on avance son pion sur la piste, du nombre de cases indiqué par chacun des dés.



Par exemple, avec les dés ci-dessus, on avance de 2 cases, puis de 5 cases, puis de 6 cases, puis de 3 cases et encore de 3 cases, pour se retrouver à la fin sur la case 19.

Les pions de Graziella et Roland sont sur la case de départ.

- Roland jette ses cinq dés et constate que les 5 nombres de points qu'il a obtenus sont tous différents. Il avance son pion des cinq nombres indiqués et termine sur la case 17.
- Graziella jette ses cinq dés. Elle constate que trois de ses dés ont le même nombre de points, et que les deux autres dés indiquent deux autres nombres, différents. Elle avance son pion et se retrouve aussi sur la case 17.

Quels sont les cinq nombres différents obtenus par Roland ?

Quels sont les cinq nombres obtenus par Graziella (trois fois le même et deux autres, différents) ?

Indiquez toutes les possibilités que vous avez trouvées, pour Roland et pour Graziella.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique, addition et multiplication d'entiers naturels
- Combinatoire

Tâche de l'élève

- Comprendre la règle d'avancement des pions et la vérifier sur l'exemple : 2 + 5 + 6 + 3 + 3 = 19. (Cette règle est connue de nombreux élèves « Jeu de l'oie »)
- Pour trouver les nombres de Roland, procéder par essais successifs, non organisés, en respectant les trois conditions : nombres naturels de 1 à 6, tous différents, dont la somme est 17.

  En procédant de manière systématique on peut par exemple commencer par 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 continuer en utilisant le 6 à la place du 5 : 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 et remplacer le 4 par le 5 pour arriver à la solution, unique :

  « 1, 2, 3, 5, 6 » car 1 + 2 + 3 + 5 + 6 = 17.

  Ou, à partir du premier essai ci-dessus, se rendre compte qu'il manque 2 à la somme et mettre directement le 6 à la place du 4
- Pour trouver les nombres de Graziella, procéder par essais successifs, non organisés et trouver une ou deux solutions, sans savoir s'il y en a d'autres ;

  Ou travailler de manière systématique en choisissant successivement le nombre qui apparaît trois fois sur les dés et envisager les six possibilités :

  - avec 1, pris trois fois, on obtient 3 et le complément à 17 est 14, qu'on ne peut pas obtenir en deux dés ;
  - avec 2, pris trois fois, on obtient 6 et le complément à 17 est 11, qu'on peut obtenir avec 5 et 6 ;
  - avec 3, pris trois fois, on obtient 9 et le complément à 17 est 8, qu'on peut obtenir avec 2 et 6 ; mais pas avec 3 et 5, ce qui ferait un quatrième « 3 », ni avec 4 et 4 qui ne sont pas différents ;

- avec 4, pris trois fois, on obtient 12 et le complément à 17 est 5, qu'on peut obtenir avec 2 et 3 ; mais pas avec 1 et 4, ce qui ferait un quatrième « 4 »,
- avec 5, pris trois fois, on obtient 15 et le complément à 17 est 2, qu'on ne peut pas obtenir avec 1 et 1 ; qui ne sont pas différents ;
- avec 6, pris trois fois, on obtient 18 qui est supérieur à 17 il n'y a pas de solution.

- Exprimer finalement les trois possibilités pour Graziella : « 2, 2, 2, 5, 6 », « 3, 3, 3, 2, 6 », « 4, 4, 4 2, 3 » ou sous forme d'écriture additive : 2 + 2 + 2 + 5 + 6 = 17 ; 3 + 3 + 3 + 2 + 6 = 17 ; 4 + 4 + 4 + 2 + 3 = 17

Niveau : 3

Origine : PR et FJ

2. DANS LE BUS (Cat. 3, 4)

Lino monte le dernier dans l'autobus qui part de la gare. Il va s'asseoir et compte qu'il y a 5 autres passagers dans l'autobus.

Au premier arrêt, devant la poste, 3 passagers descendent et 6 montent.

Au deuxième arrêt, à la place du marché, personne ne descend et 13 passagers montent.

Au troisième arrêt, devant la mairie, 5 passagers descendent et personne ne monte.

Au quatrième arrêt, devant l'école, 2 passagers descendent et 12 passagers montent, mais 4 d'entre eux doivent rester debout car toutes les places assises sont déjà occupées par un passager.

Quel est le nombre de places assises dans le bus pour les passagers ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

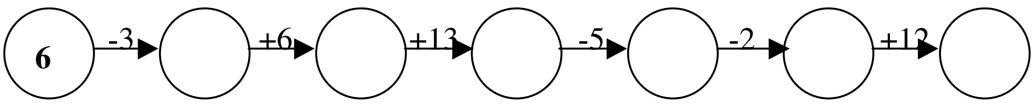
- Arithmétique : addition, soustraction de nombres entiers naturels

Analyse de la tâche

Les élèves peuvent utiliser une démarche numérique, graphique (ou mixte) pour trouver le nombre de sièges.

- Démarche numérique : associer l'addition aux personnes qui montent, la soustraction aux personnes qui descendent : préciser la situation de départ et comprendre que Lino ne fait pas partie des 5 personnes déjà présentes dans le bus. Donc, quand Lino est monté, il y a 6 personnes dans le bus : 5 + 1 = 6 ; au premier arrêt : 6 - 3 + 6 = 9 ; au 2e arrêt : 9 + 13 = 22 ; au 3e arrêt : 22 - 5 = 17 ; au 4e arrêt : 17 – 2 + 12 = 27.

  Comprendre que si 4 personnes restent debout alors qu'il y a 27 personnes dans le bus, cela signifie qu'il y a 27 - 4 = 23 personnes assises ; donc 23 places assises
- Démarche graphique : dessiner ou gommer des « personnes » dans le bus, ou dessiner autant de situations du bus qu'il y a d'arrêts.
- Procédure « mixte ». Dessiner un schéma linéaire du type suivant et soustraire à la fin les 4 personnes restées debout :



Niveau : 3, 4

Origine : reprise du problème du 3e RMT, épreuve I, no 9, modifié et simplifié

3. PARTIES DE PING-PONG (Cat. 3, 4)

Anne, Boris, Carole, Denis, et Elisabeth se retrouvent pour jouer au ping-pong après l'école.
Ils n'ont pas beaucoup de temps et il n'y a qu'une table, une balle et deux raquettes.
Ils décident que :

- chacun jouera une seule partie contre chacun des autres enfants,
- chaque partie durera cinq minutes.

Combien de temps faudra-t-il pour jouer toutes les parties ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANAYLSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique : combinatoire (rechercher les combinaisons de deux personnes parmi un ensemble de cinq)

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a cinq enfants qui vont rencontrer tous les autres deux à deux, en parties successives de 5 minutes et qu'il faudra calculer la durée totale.
- Déterminer le nombre de parties pour constater qu'il y en a 10 (en évitant de compter les symétriques) :

  par exemple en commençant pas A : AB, AC, AD, AE, puis en continuant par B : BC, BD, BE, et ainsi de suite : CD, CE et DE, ou par représentation graphiques de liens entre deux des cinq enfants,

  ou en considérant que chacun des 5 enfants va rencontrer ses 4 camarades et que parmi les 20 (4 x 5) couples ainsi constitués, une moitié est symétrique de l'autre et que par conséquent l'organisation de 10 parties suffit pour permettre toutes les rencontres.
- Calculer la durée des dix parties successives : 10 x 5 = 50 (en minutes).

Ou : Comprendre que le premier joueur (A) jouera quatre parties, en 20 minutes ; que le joueur B ne pourra plus jouer que contre trois autres adversaires différents, en 15 minutes, que le joueur C ne jouera que contre deux autres adversaires différents, en 10 minutes, et enfin que le joueur D ne jouera que contre le dernier joueur E, en 5 minutes ; puis calculer la durée totale : 20 + 15 + 10 + 5 = 50 (en minutes).

Niveau : 3, 4

Origine : FJ

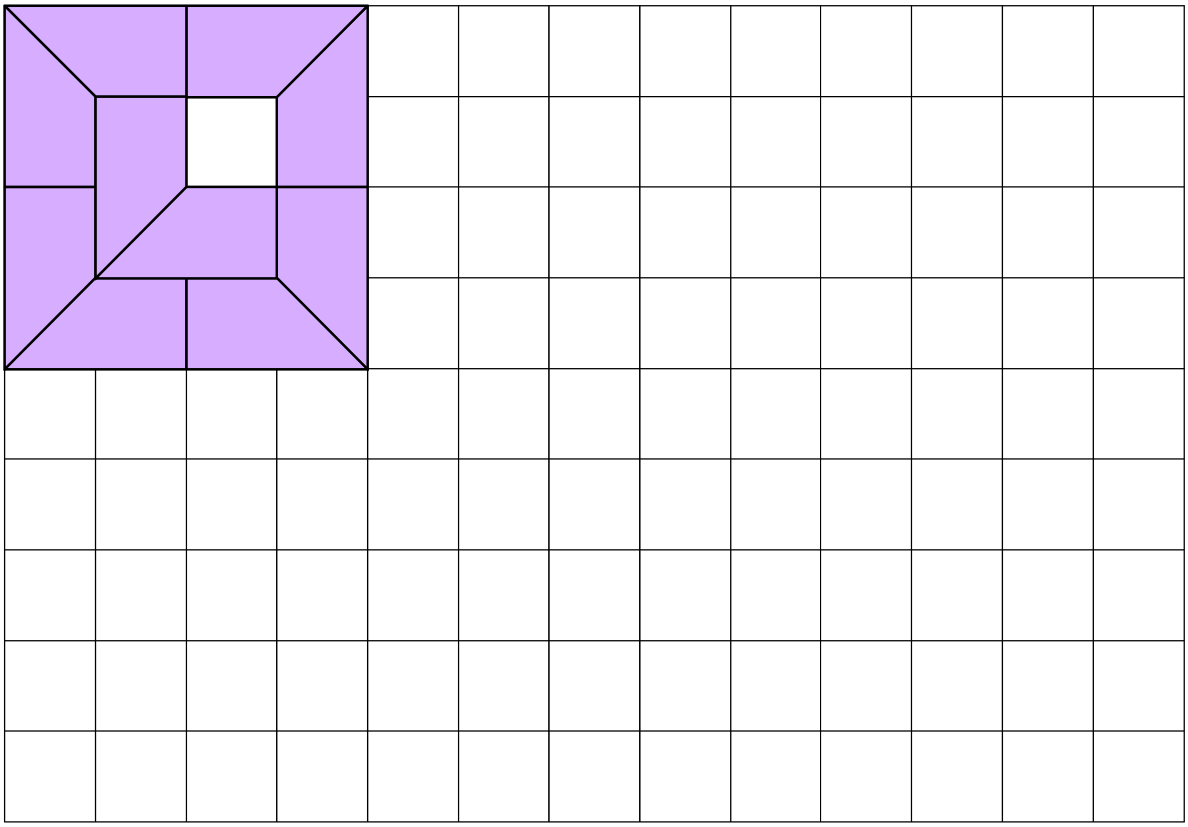
4. CARRES AVEC OU SANS TROU ? (Cat. 3, 4)

Luc a reçu une boîte de construction avec une planche quadrillée et 16 pièces de la même forme.

Il cherche à former des carrés avec quelques-unes de ses pièces ou avec toutes ses pièces, placées les unes à côté des autres sans qu'elles se recouvrent et si possible sans laisser de trou.

Et s'il n'est pas possible de construire un carré sans trou, il veut que le trou soit exactement au centre du carré et ne laisse voir qu'un carreau du quadrillage.

Avec 10 de ses pièces, Luc a réussi à former un carré (en haut à gauche sur la figure) mais il n'est pas satisfait : son carré n'est pas complet et le trou n'est pas juste au centre du carré.



Et vous, pourriez-vous former un carré sans trou, plus grand ou plus petit, avec quelques-unes de ces pièces ou avec les 16 pièces ?

Si oui, dessinez-en un sur le quadrillage ci-dessus.

Et pourriez-vous former un carré avec un trou, juste au centre, qui ne laisse voir qu'un carreau du quadrillage, toujours avec quelques-unes de ces pièces ou avec les 16 pièces ?

Si oui, dessinez-en un sur le quadrillage ci-dessus.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : pavage de carrés, par des trapèzes rectangles (translations, rotations, symétries)
- Mesures : mesure d'aire avec deux types d'unités : les carreaux du quadrillage et les pavés (d'un carreau et demi) ou dénombrement de carreaux et de demi-carreaux

Analyse de la tâche

- Observer la figure de départ et s'approprier la forme des pavés : trapèzes qui recouvrent un carreau et demi du quadrillage (le demi-carreau le carré de Jojo ne peut pas être rempli car il manque un carreau du quadrillage (qui ne peut pas être recouvert exactement par un pavé d'un carreau et demi) et que le trou ne peut pas être juste au milieu dans un carré de 4 x 4.
- Il y a deux manières de rechercher les carrés à paver :
  - par construction sur la grille ou sur une grille annexe en dessinant les pavés un à un, et en les effaçant lorsqu'ils dépassent ou lorsqu'ils laissent des vides qu'on ne peut combler,
  - de manière beaucoup plus rapide et plus simple, par manipulation après avoir découpé les 16 pavés, puis par dessin des solutions trouvées.
- Chercher à former un carré, sans trou ou avec un trou au centre, de dimensions différentes et constater que :
  - pour 2 x 2, il manque deux triangles (demi-carrés) et il n'est pas possible d'avoir un trou carré au centre,

    ou, par un raisonnement numérique, constater qu'on ne peut pas paver une surface de 4 carreaux avec deux pièces qui, assemblées d'une certaine manière, forment un rectangle de 3 carreaux
  - pour 3 x 3, il est facile de trouver une solution sans trou, par exemple par modules de trois rectangles de 3 x 1 (figure 1) ou d'un rectangle de 3 x 1 et d'un autre de 3 x 2 (figure 2) ; et par conséquent, il n'y aura pas de solution avec un trou au centre (car si on retire une pièce, il manquera plus d'un carreau)
  - pour 4 x 4, il n'y a pas de solution, comme dit précédemment (il y en aurait une avec un trou centré, mais de 4 carreaux)
  - pour 5 x 5, il y a de nombreuses solutions avec un trou au centre dont la recherche peut être facilitée par des assemblages de modules rectangulaires : par exemple quatre rectangles de 3 x 2 (figure 3), 8 rectangles de 3 x 1 (figure 4), assemblages mixtes (figure 5), « complément » du carré de 4 x 4 (figure 6), etc.

    Ici aussi, la présence d'un trou de 1 carreau devrait faire renoncer les élèves à la recherche d'un carré sans trou de 5 x 5.

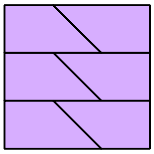
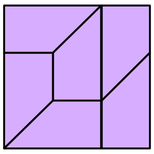
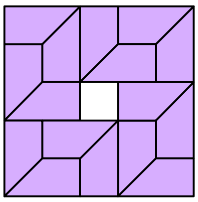
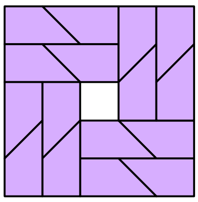
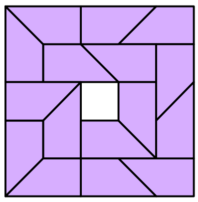
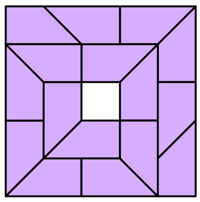







figure1 figure 2 figure 3 figure 4 figure 5 figure 6

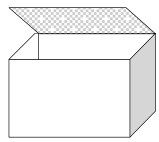
  - pour 6 x 6, il serait possible de former un carré sans trou, mais le nombre de pièces, limité à 16, ne le permet pas ; et la contrainte des 16 pièces empêche aussi la formation des carrés suivants.
- Dessiner les solutions ou effectuer les collages

Niveaux : 3, 4

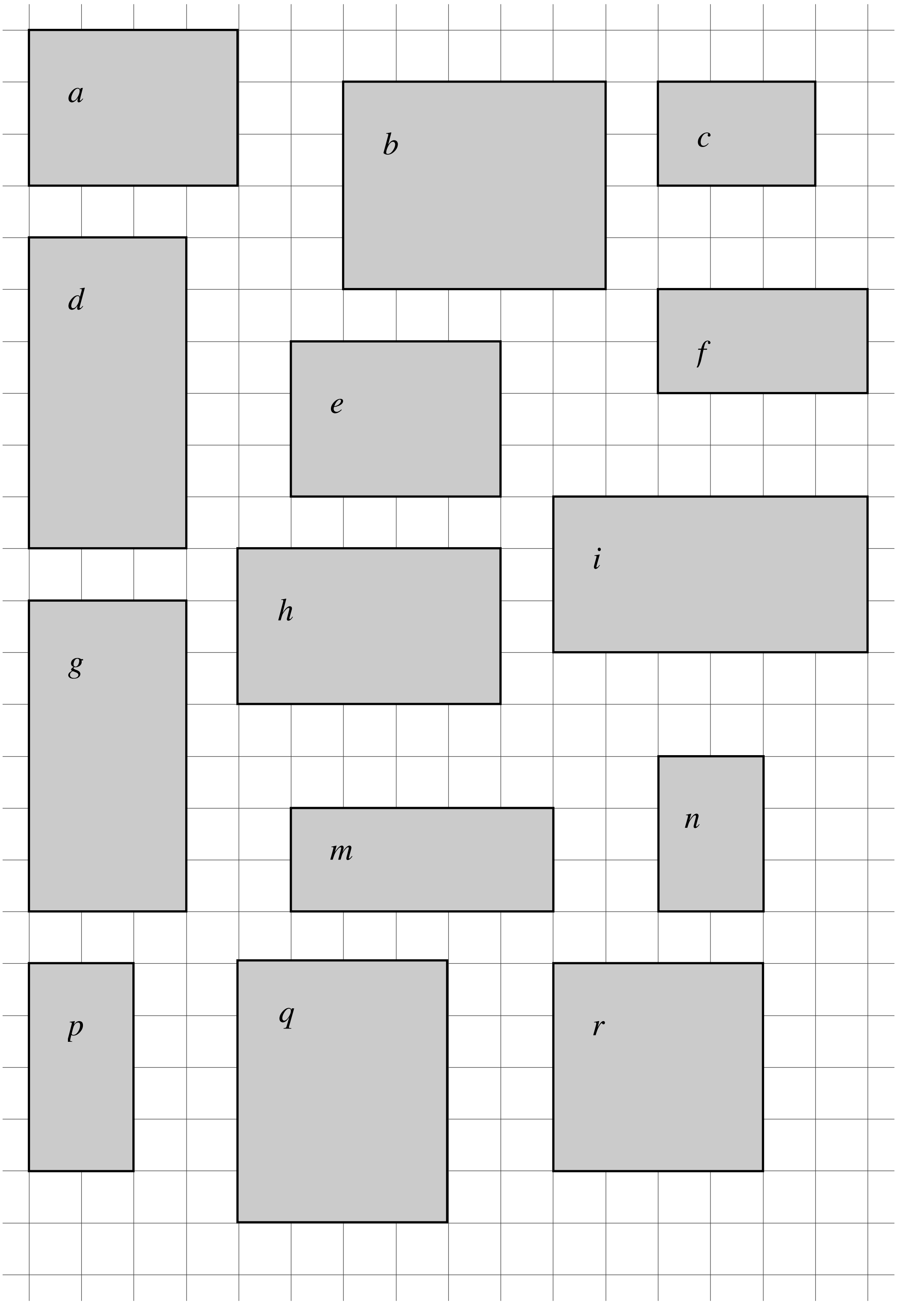
Origine : Suisse romande

5. BOITES (Cat. 3, 4, 5)

Franco assemble des cartes avec du papier collant pour obtenir des boîtes de ce genre :



Chaque carte est une face de la boîte. Franco les utilise comme elles sont, sans les découper et sans les plier. Il a déjà construit plusieurs boîtes, mais il lui reste encore les cartes que vous voyez ci-dessous :



Combien de boîtes pourra-t-il encore construire avec les cartes qui restent ?
Dites quelles sont les cartes qui lui serviront.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : rectangle et parallélépipède

Analyse de la tâche

- Découper les rectangles et reconstruire la boîte comme on le ferait pour un puzzle.

ou :

- Comprendre que chaque boîte est composée de 6 faces et que dans une boîte de cette forme (parallélépipède rectangle), les faces opposées sont des rectangles égaux (isométriques ou superposables).
- Regrouper, par exemple, les cartes de mêmes dimensions : *a* et *e* ; *b* et *q* ; *c* et *n* ; *d*, *g*, et *i* ; *f* et *p* ; et voir que *h*, *m* et *r* restent seules dans cette classification et sont donc à éliminer.
- Comprendre qu'il faut aussi exclure, parmi les cinq groupes formés précédemment :
  - les cartes *d, g, i* dont un côté vaut 6 parce qu'aucun autre couple a des côtés de cette longueur,
  - et les carte *b, q* dont un côté vaut 5 parce qu'aucun autre couple a des côtés de cette longueur.
- Comprendre que la seule boîte constructible sera composée des cartes *a, e* ; *c, n*.et *p, f.*
- En déduire que les cartes qui restent ne donnent pas la possibilité de construire une deuxième boîte.

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Valle d'Aosta

6. LE JEU DU CANARD (Cat. 4, 5)

Le jeu du Canard se joue comme le jeu de l'Oie : on déplace son pion sur une piste numérotée de 1 à 60, en utilisant 2 dés et en partant de la case « départ ».

Mais la règle n'est pas la même qu'au jeu de l'Oie : chaque fois que l'on a jeté les deux dés, on peut choisir d'additionner ou de multiplier les deux nombres obtenus.

Par exemple, si les deux dés donnent 3 et 5 on peut choisir de les additionner et on avance de 8 cases, ou on peut choisir de les multiplier et on avance de 15 cases.

Daniel a obtenu 5 et 4 la première fois qu'il a jeté les dés ; 4 et 6 la deuxième fois; 5 et 6 la troisième fois. Après ces trois lancers, il est arrivé exactement sur la case 60, à la fin du jeu.

Quelles sont les opérations que Daniel a choisi de faire, à chaque fois ?

Pouvait-il arriver à la case 60 en choisissant d'autres opérations ?

Écrivez les opérations que Daniel a choisi de faire à chaque fois et expliquez pourquoi.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique, addition et multiplication d'entiers naturels
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Effectuer les trois multiplications, trouver les trois produits 20, 24 et 30 (dont la somme est 74) ; effectuer les trois additions, trouver les trois sommes 9, 10 et 11 (dont la somme est 30), constater qu'il faudra obligatoirement choisir une addition et deux multiplications ou une multiplication et deux additions pour arriver à 60.

  En choisissant un seul produit (le plus grand est 30), on n'arrive pas à 60 avec deux sommes. Il faut donc deux multiplications et une addition. Il y a trois choix possibles avec deux des trois produits. On obtient pour deux coups 20 + 24 = 44, 24 + 30 = 64 ou 20 + 30 = 50. Seul le dernier choix conduit à 60 avec la somme 10 au deuxième coup.

Ou : observer que tous les produits sont des nombres pairs et que deux sommes sont impaires et une paire. Pour arriver à 60, il faut alors prendre ou les deux sommes impaires (5 + 4 et 5 + 6) et le produit (4 x 6) ou la somme paire (6 + 4) et les deux produits (5 x 4 et 6 x 5) et vérifier que c'est seulement dans ce dernier cas qu'on obtient 60.

Ou: considérer les trois couples de nombres qu'on peut obtenir après chaque lancer : 9 et 20 ; 10 et 24 : 11 et 30. Constater que, comme on ne peut prendre qu'un seul des nombres de chaque couple, il n'y a qu'une façon d'atteindre 60 : 20 + 10 + 30 = (5 x 4) + (4 + 6) + (5 x 6).

Ou : organiser une recherche systématique, éventuellement en s'aidant d'un tableau ou d'un arbre

(5 + 4) + (4 + 6) + (5 + 6) = 30	(5 x 4) + (4 + 6) + (5 + 6) = 41
(5 + 4) + (4 + 6) + (5 x 6) = 49	**(5 x 4) + (4 + 6) + (5 x 6) = 60**
(5 + 4) + (4 x 6) + (5 + 6) = 44	(5 x 4) + (4 x 6) + (5 + 6) = 55
(5 + 4) + (4 x 6) + (5 x 6) = 63	(5 x 4) + (4 x 6) + (5 x 6) = 74

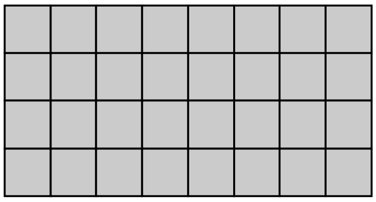
- Rédiger la réponse avec le choix des opérations : la multiplication 5 x 4 en premier, puis l'addition 6 + 4 en deuxième et enfin de la multiplication 5 x 6 et la justifier par des écritures et dire que c'est la seule solution.

Ou : procéder par essais, sans être certain que la solution est unique et sans réponse valable à la deuxième question.

Niveau : 3

Origine : Valle D'Aosta

7. MOUSSE AU CHOCOLAT (Cat. 4, 5, 6)



Doris, Françoise et Ben ont besoin de 150 grammes de chocolat pour préparer chacun une mousse au chocolat.
Chacun prend une tablette de chocolat de 200 grammes comme celle-ci et décide de la couper en suivant ses lignes.
Doris coupe sa tablette en trois parties dont l'une est un rectangle de 150 grammes.
Françoise coupe sa tablette en deux parties seulement, dont l'une est aussi un rectangle de 150 grammes.
Ben coupe aussi sa tablette en deux parties dont l'une est aussi un rectangle de 150 grammes, mais plus long que ceux de Doris et de Françoise.

Dessinez un rectangle comme celui de Doris, un rectangle comme celui de Françoise et un rectangle comme celui de Ben, en suivant les lignes de leur tablette

Faites trois dessins différents.

Expliquez pourquoi chacun de ces rectangles pèse 150 grammes.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances :

- Géométrie : rectangle
- Arithmétique : proportionnalité, fractions élémentaires

Analyse de la tâche

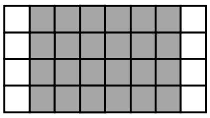
- Se rendre compte qu'il faut passer de 200 g - la tablette entière - à 150 g, et que le problème est de déterminer quelle sera la partie de tablette qu'il faudra conserver, tout en maintenant une forme rectangulaire.
- Se rendre compte que, si la tablette entière pèse 200 g, la moitié pèse 100 g et la moitié de la moitié (ou le quart), pèse 50 grammes et qu'il faudra donc enlever un quart de la tablette ou en conserver les trois quarts. (D'autres calculs fondés sur la proportionnalité sont possibles).
- Visualiser alors les parties rectangulaires qui peuvent représenter un quart ou trois quarts (respectivement 1 ou 3 rangs « horizontaux » ou 2 ou 6 rangs « verticaux »).

Ou imaginer la décomposition en carrés : compter les carrés (32), en prendre la moitié et le quart pour déterminer qu'il faudra 24 carrés pour la mousse au chocolat, qui peuvent former un rectangle de 3 x 8 ou de 4 x 6.

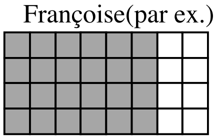
Ou calculer le poids d'un carré (200 : 32 = 6,25) et calculer combien de carrés seront nécessaires pour la mousse au chocolat 150 : 6,25 = 24, puis constater que les rectangles possibles de 24 carreaux sont 3 x 8 ou de 4 x 6.

- Observer qu'il n'y a que deux dispositions d'un rectangle de 4 x 6 sur la plaque (qui ne sont pas symétriques l'une de l'autre) et une seule disposition d'un rectangle de 3 x 8 (à une isométrie près) et constater d'après les affirmations de chacun que le rectangle auquel pense Doris est obtenu par deux découpes dans le sens de la largeur, que celui de Françoise par une seule découpe dans le sens de la largeur et celui de Benjamin par une découpe dans le sens de la longueur :

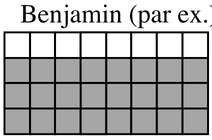
Doris



Françoise(par ex.)



Benjamin (par ex.)



Niveau: 4, 5, 6
Origine : Luxembourg

8. BONBONS AUX TROIS GOUTS (Cat. 5, 6)

Cécile contrôle le contenu de ses trois pots de bonbons :

- dans le pot avec l'étiquette MENTHE, il y a 16 bonbons : quelques-uns au citron, quelques-uns à l'orange et 2 à la menthe ;
- dans le pot avec l'étiquette ORANGE, il y a 27 bonbons : quelques-uns au citron, quelques-uns à la menthe et 11 à l'orange ;
- dans le pot avec l'étiquette CITRON, il y a 2 bonbons, les deux au citron.

Cécile décide de remettre les bonbons à leur place, pour que chaque pot ne contienne que les bonbons correspondant à l'étiquette qui lui est collée.

À la fin de son travail, Cécile constate qu'il y a le même nombre de bonbons dans chaque pot.

Combien de bonbons à l'orange et combien de bonbons au citron y avait-il dans le pot avec l'étiquette MENTHE ?

Et combien de bonbons à la menthe et combien de bonbons au citron y avait-il dans le pot avec l'étiquette ORANGE ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction, division; décomposition d'un nombre naturel en somme de deux termes
- Logique : gestion simultanée de plusieurs conditions

Analyse de la tâche

- Trouver le nombre total des bonbons, par la somme des nombres de bonbons de chaque pot : 45 = 16 + 27 + 2.
- Déduire que, après l'intervention de Cécile, dans chaque pot il y a 15 (45 : 3) bonbons, tous du goût correspondant à l'étiquette.
- De la première information et du fait que dans le pot avec l'étiquette ORANGE il y avait déjà 11 bonbons à l'orange, déduire l'existence de 4 autres bonbons encore à l'orange (15 - 11). Ces bonbons devaient nécessairement se trouver dans le pot MENTHE (dans le pot CITRON il n'y avait que des bonbons au citron). Conclure alors que le pot MENTHE contenait 4 bonbons à l'orange, 2 à la menthe, et 10 (16 - 2 - 4) au citron.
- De manière analogue, observer que, vu qu'il y a dans le pot MENTHE 2 bonbons à la menthe, il en manque 13 (15–2) autres à la menthe devaient nécessairement se trouver dans le pot ORANGE. Trouver alors que la composition initiale du pot ORANGE était : 13 bonbons à la menthe, 11 à l'orange et 3 (27 - 11 - 13) au citron.

Ou : après avoir déterminé qu'il y a 15 bonbons de chaque goût, se rendre compte que dans le pot MENTHE il devait y avoir 14 (16 – 2) bonbons aux goûts orange ou citron, alors que dans le pot ORANGE il devait y avoir 16 (27 - 11) bonbons aux goûts menthe ou citron.

- Considérer alors tous les couples de nombres naturels dont la somme est 14 : 1+13; 2+12; 3+11; 4+10; 5+9; 6+8; 7+7 ou, dans chaque somme, les termes sont soit des bonbons à l'orange ou soit au citron se trouvant dans le pot MENTHE. Puisqu'il ne manque que 4 bonbons à l'orange (11 sont déjà dans le bon pot) la seule décomposition qui convient est 4+12. En déduire que dans le pot MENTHE il y avait 4 bonbons à l'orange, 10 au citron (en plus des 2 à la menthe).
- De même, les couples de nombres naturels dont la somme est 16 sont : 1+15; 2+14; 3+13; 4+12; 5+11; 6+10; 7+9; 8+8 où les termes sont soit des bonbons à la menthe, soit au citron du pot ORANGE. Puisqu'il manque 13 bonbons à la menthe (2 sont déjà dans le bon pot), la seule décomposition qui convient est 3+13. En déduire que dans le pot ORANGE il y avait 13 bonbons à la menthe et 3 au citron (avec les 11 à l'orange).

Ou : organiser les données par un tableau contrôlant les totaux de chaque pot et de chaque goût

Niveaux : 5, 6

Origine : Siena

9. LE REVEIL (Cat. 5, 6)

Mon réveil avance de 10 minutes par heure. Je l'ai mis à l'heure hier soir à 22 h 00. Quand je me suis réveillé ce matin, il indiquait 08 h 30.

Quelle heure était-il réellement ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Mesures : mesure de temps : heures et minute
- Organisation d'une recherche

Analyse de la tâche

- Comprendre le terme « avancer » afin d'estimer que l'heure recherchée est inférieure à 08h30.
- Convertir des minutes en heures.

Puis,

- Mettre en relation les durées : 1 heure réelle équivaut à 1 heure 10 min pour le réveil. Ajouter 1 h 10.
- Mettre en relation heures et minutes. (1 heure = 60 min) et prendre en compte qu'il y a 24 heures dans une journée et que 24h00 s'écrit 00h00.
- Poursuivre la recherche, heure par heure, pour trouver que le réveil avance de 90 min ou 1 h 30, et en conclure qu'il faut soustraire 1 h 30 à 8h30 pour obtenir l'heure exacte.

Ou : écrire une succession d'affirmations du genre: à 23h00 il marquera 23h10, à minuit il marquera 00h20, à 1 h du matin il marquera 01h30, puis à 2 h : 02h40, puis à 3 h : 03h50 ; puis à 4 h : 05h00 (seul passage délicat de 3h50 + 1h10 à 05h00) ; puis à 5 h : 06h10, puis à 6 h : 07h20 et enfin à 7 h : 8h30 ; ou la succession inverse à partir de 8h30.

Ou : déterminer que 6 heures réelles équivalent à 7 heures au réveil. Quand le réveil indique 05h00 il est 04h00. En déduire qu'il faut 3 autres heures pour obtenir un écart supplémentaire d'une demi-heure.

Ou : considérer les 630 « minutes du réveil » de 22 heures à 8 h 30 et les diviser par les « heures du réveil » qui sont de 70 minutes pour obtenir 9 en « heures normales », puis ajouter 9 h à 22 h pour trouver 7 h.

- Formuler la réponse : il est 7 h quand le réveil indique 8 h 30.

Niveau : 5, 6

Origine : Lyon

10. JEU D'ANNIVERSAIRE (Cat. 5, 6, 7)

Pour son anniversaire, Corinne invite cinq amies : Amandine, Béatrice, Danielle, Émilie et Francine.

Après le repas, elles décident de former des équipes de deux pour jouer aux cartes. Mais…

- Amandine ne veut être ni avec Francine ni avec Béatrice,
- Béatrice ne veut pas faire équipe avec Émilie,
- Corinne demande de faire équipe avec Francine ou avec Béatrice,
- Danielle n'accepte de faire équipe qu'avec Béatrice ou avec Corinne,
- Francine ne s'entend qu'avec Amandine, avec Corinne et avec Danielle.

Constituez les équipes de deux joueuses respectant les volontés de chacune.

Y a-t-il une seule façon de constituer les équipes ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique

Analyse de la tâche

- Utiliser les indices et dresser des listes d'équipes possibles au fur et à mesure de la lecture, soit sous forme d'une liste soit sous la forme de listes distinctes selon les amies, soit sous forme de tableau à double entrée.
- 1er indice : les équipes possibles pour Amandine sont A-E ; A-C; A-D
- 2e indice : les équipes possibles pour Béatrice sont B-C ; B-D ; B-F (pas B-A puisque Amandine ne veut pas être avec Béatrice).
- 3e indice : les équipes pour Corinne sont C-F ou C-B. Donc Amandine ne peut être avec Corinne (~~A-C~~).
- 4e indice : les équipes pour Danielle sont D-B ou D-C. Donc Amandine ne peut être avec Danielle (~~A-D~~). Donc Amandine est avec Émilie.
- 5e indice : Francine fait équipe avec Corinne car Amandine est déjà avec Émilie et Danielle n'a pas choisi Francine.
  Donc Béatrice fait équipe avec Danielle.

Ou : on choisit un couple, on regarde s'il est compatible avec les indices ; si oui on en choisit un autre et l'on continue. Sinon on teste un autre couple, etc…

Ou encore en écrivant toutes les possibilités (combinatoire) et en éliminant celles qui ne sont pas réalisables à partir de l'énoncé

A-B ;	A-C ;	A-D ;	A-E ;	A-F
	B-C ;	B-D ;	B-E ;	B-F
		C-D ;	C-E ;	C-F
			D-E ;	D-F
				E-F

Ou encore par représentations graphiques (flèches, ...)

Niveau : 5, 6, 7

Origine : Belgique

11. LES DÉS PERDUS (Cat. 5, 6, 7)

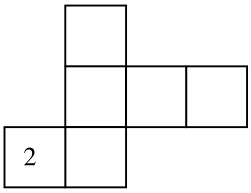
Marthe a perdu les dés de son jeu préféré.

Ces dés étaient spéciaux. Sur leurs faces :

- les nombres étaient tous différents
- et ils étaient tous pairs et inférieurs à 20.

Les nombres étaient en outre disposés de telle manière que sur deux faces opposées, un nombre était le double de l'autre : par exemple, si sur une face il y avait le nombre 2, sur la face opposée il y avait le nombre 4.

Afin de pouvoir encore utiliser son jeu, Marthe a décidé de construire les dés en carton et a préparé un modèle à découper, qui est représenté ici et sur lequel elle a déjà noté le nombre 2.



Quels autres nombres Marthe pourra-t-elle écrire sur le modèle de son dé ?

Dessinez toutes les possibilités de disposer les cinq autres nombres sur ce modèle, avec un dessin pour chaque possibilité.

Expliquez comment vous avez trouvé les nombres.

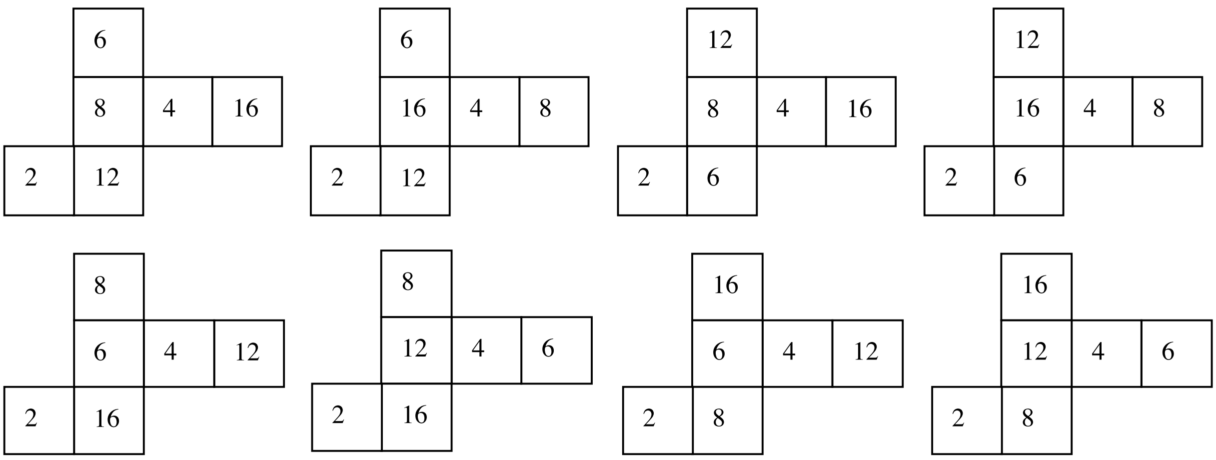
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : le cube et son développement
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Prendre les nombres pairs inférieurs à 20 (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18)
- Écarter 0, qui n'a pas de double différent de lui-même, puis 10, 14 et 18 qui sont le double d'un nombre impair et la moitié d'un nombre supérieur ou égal à 20.
- Apparier les nombres restants (2, 4, 6, 8, 12, 16) de manière que dans chaque paire l'un soit le double de l'autre : (2 - 4 ; 6 – 12 ; 8 – 16) et les disposer sur les faces.
- Préparer des modèles et y noter les nombres de manière organisée afin d'avoir toutes les solutions : il n'y a qu'un emplacement pour le 4, quatre emplacements pour le deuxième couple (6 – 12) et deux emplacements restants pour le troisième couple (8 - 16). Il y a donc 8 (4 x 2) possibilités qui sont représentées ici :

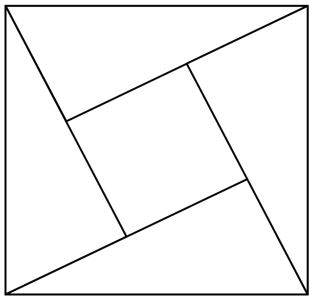


Niveaux 5, 6, 7

Origine: Udine

12. LE CHAMP DE GRAND-PERE (Cat. 6, 7, 8)

Un grand père offre à ses cinq petits-enfants un champ de forme carrée divisé en cinq parcelles, un carré et quatre triangles, telles que la longueur des côtés du carré situé au centre est égale à celle des petits côtés de chacun des quatre triangles. (Voir figure ci-contre)



Selon vous, les cinq parcelles ont-elles la même aire ?

Justifiez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Géométrie : décomposition et recomposition de figures planes; aire du carré et du triangle rectangle ; isométries

Analyse de la tâche

- Observer la figure et constater que, par construction, chacun des quatre triangles est rectangle (l'un de ses angles, dont le sommet est commun à celui du carré intérieur, est droit, comme celui du carré).
- Constater également que la longueur du grand côté de l'angle droit de chaque triangle est constituée d'un côté du carré intérieur et du petit côté d'un autre triangle, lui-même de même longueur que le côté du carré intérieur et que, par conséquent, le grand côté de l'angle droit de chaque triangle est le double du petit côté ou du côté du carré intérieur. Comprendre alors que les quatre triangles sont isométriques et, par conséquent, de même aire.
- Comprendre que le problème consiste à confronter l'aire du carré central avec celle d'un des triangles rectangles :
  - par des calculs d'aires : si c est la mesure du côté du carré central, son aire est c^2, les mesures des côtés de l'angle droit d'un triangle sont c et $2c$ et son aire vaut $(c2c) / 2 = c^2$. Cette justification au moyen d'écritures littérales, peut aussi se faire par explications verbales, ou en attribuant une valeur numérique au côté du carré central (par exemple 1) et les valeurs correspondantes aux côtés du triangle, ou encore en prenant les mesures nécessaires sur la figure (à condition de respecter explicitement le rapport des côtés du triangle) ;
  - par une décomposition en unités d'aire élémentaires, par exemple le pavage par des triangles de la figure 1.

    (À ce propos, il faut constater que le triangle inférieur de la figure est partagé en quatre petits triangles isométriques, dont trois sont images l'un de l'autre par une translation et celui du centre par une symétrie centrale. On n'exigera pas cependant une démonstration plus formelle.)
  - par des décompositions et recompositions, par exemple : translation du triangle inférieur pour constituer un rectangle ayant pour largeur le côté du carré et pour longueur le double de ce côté, d'où 2 triangles équivalent (pour l'aire) à 2 carrés et 1 triangle équivaut donc au carré (figure 2) ; ou rotation d'un petit triangle de 180 degrés pour reconstituer un carré avec le trapèze rectangle restant (figure 3) ou transformation du grand carré en cinq carrés en croix en répétant la transformation précédente (figure 4) etc.

    (À propos de la figure 3, il faut constater que le prolongement du grand côté de l'angle droit d'un triangle coupe le côté du carré initial en son milieu, ce qui pourrait se justifier par Thalès ou par le découpage de la figure 1.)

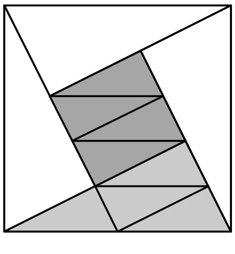


figure 1

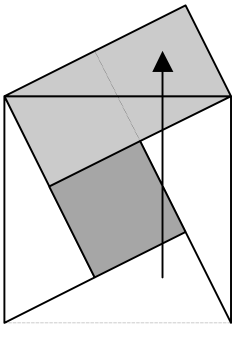


figure 2

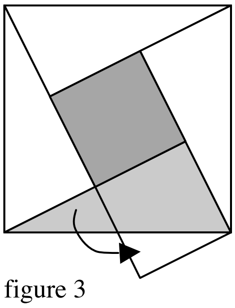


figure 3

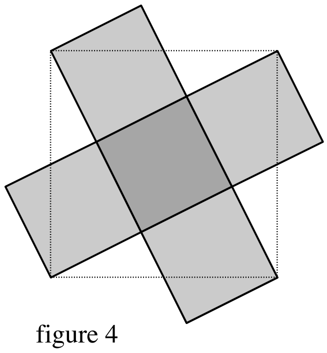


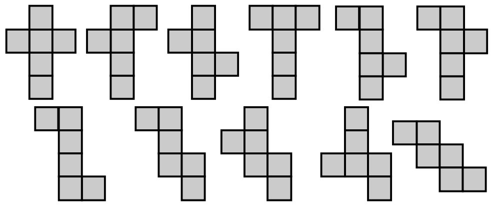
figure 4

Degrés : 6, 7, 8
Origine : Lodi

13. DEVELOPPEMENTS DE PYRAMIDE (Cat. 6, 7, 8)

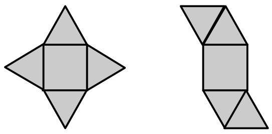
Le mois passé, les élèves de la classe d'Antoine ont cherché tous les développements du cube. Ils en ont trouvé 11, tous différents (qu'on ne peut pas superposer exactement en les déplaçant ou les retournant) et ont vérifié qu'il n'y en a pas d'autres. (voir figure ci-contre)

Les 11 développements du cube:



Aujourd'hui, Antoine et ses camarades doivent trouver tous les développements d'une pyramide régulière de base carrée dont les quatre faces latérales sont des triangles équilatéraux et dont toutes les arêtes mesurent 2 cm.
Ils en ont déjà trouvé deux, mais ils pensent qu'il y en a encore d'autres :

Les 2 développements de la pyramide déjà trouvés (à agrandir):



Combien existe-t-il, en tout, de développements différents de cette pyramide ?

Dessinez-les tous, avec tous les côtés de 2 cm.

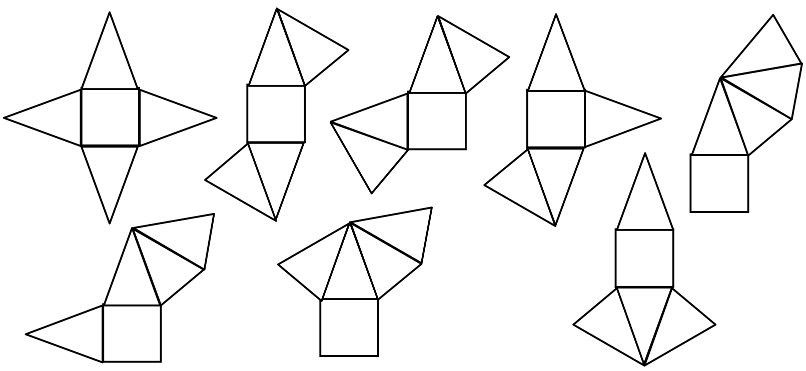
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : pyramide, lien entre un développement dans le plan et le solide obtenu par pliage
  reconnaissance de figures isométriques planes
- Combinatoire : combinaisons d'un carré et de 4 triangles équilatéraux pour obtenir le solide désiré

Analyse de la tâche

- Vérifier que les deux exemples de développements permettent bien de construire la pyramide.
- Organiser la recherche pour obtenir les autres développements en esquissant des schémas. Par exemple, placer la base et disposer les triangles de manière systématique : un par côté (exemple donné) « 1, 1, 1, 1 » ; répartis sur trois côtés « 0, 1, 1, 2 », répartis sur 2 côtés adjacents ou opposés, par groupes de deux : « 0, 0, 2, 2 » ; « 0, 2, 0, 2 » ; répartis sur 2 côtés adjacents ou opposés avec un groupe de trois et un isolé : « 0, 0, 1, 3 » ; « 0, 1, 0, 3 », tous attachés à un côté : « 0, 0, 0, 4 ».
- Essayer les différentes possibilités pour chacune des dispositions précédentes et éliminer celles qui donnent des faces superposées après le pliage.
- Éliminer les figures isométriques (superposables par un déplacement dans le plan - translation rotation – ou par une symétrie axiale ou retournement) pour ne retenir que les huit développements différents de la figure suivante :



- Après vérifications des schémas, effectuer les constructions aux dimensions requises (2 cm par côté)

Ou : découper des carrés et des triangles équilatéraux de 2 cm d côté, construire la pyramide en collant les pièces puis « l'ouvrir » successivement de différentes manières et noter les dispositions des faces dans le plan avant d'éliminer celles qui sont isométriques.

Niveau : 6, 7, 8

Origine : Franche-Comté

14. DROLE DE MULTIPLICATION (Cat. 7, 8, 9)

Martin doit multiplier un nombre par 342. Il pose sa multiplication ainsi :

□□□ <—— premier nombre
x 3 4 2
□□□□
□□□□ –
□□□□ – – – <—— erreur de décalage au 3e niveau
.□□□□□□□ <—— résultat (trop grand)

Par distraction, il décale tous les chiffres du troisième « niveau » d'un rang de trop vers la gauche. Il trouve un résultat trop grand. En effet, le résultat qu'il obtient dépasse le bon résultat de 1 836 000.

Retrouvez le premier nombre de la multiplication de Martin.

Expliquez comment vous avez trouvé ce nombre.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : numération décimale de position ; compréhension de la technique opératoire de la multiplication
- Algèbre : mise en équation et résolution d'une équation du premier degré

Analyse de la tâche

- Comprendre que l'algorithme classique de la multiplication posée d'un nombre n par 342 consiste à écrire les résultats intermédiaires sous la forme $n \times 2$, $n \times 40$, $n \times 300$ et les additionner pour obtenir le produit.
- Comprendre que dans le cas de la multiplication de Martin, les produits partiels sont $n \times 2$, $n \times 40$, $n \times 3\,000$ et que du fait de cette erreur, il a multiplié le nombre initial n par 3 042.
- En déduire que 1 836 000 correspond à la différence entre le produit du nombre initial par 3042 et le produit du nombre initial par 342 (soit 2700 fois le nombre initial)
- Comprendre alors, que le nombre initial est le quotient 1 836 000 par 2700, soit 680.

Ou : résoudre le problème par approximations successives à partir d'un nombre de trois chiffres comme 800, par exemple : calculer la différence entre (800 x 342 + 1 836 000) et (800 x 42 + 800 x 3 000), la noter (324 000) puis essayer avec 700 et constater que la différence n'est plus que 54000, puis essayer avec 690 et constater que la différence est 27000 et trouver la solution en essayant 680.

Ou : résoudre le problème algébriquement en posant l'équation $1\,836\,000 = 3042x - 342x$ puis en la résolvant :

$1\,836\,000 = (3042 - 342)x = 2700x \quad \Rightarrow x = 1\,836\,000/2700 = 680$

Niveaux : 7, 8, 9

Origine : Blois (ex Châteauroux)

15. LE BOUQUET (Cat. 7, 8, 9, 10)

Dans la classe de Sandra, les élèves apprécient beaucoup leur professeur de mathématiques. Ils ont décidé de lui offrir un bouquet de fleurs pour la fête de Noël.

Chaque élève a donné autant de fois 2 centimes d'Euros qu'il y a d'élèves dans la classe.

Sandra a réuni les cotisations et fait le compte de ce qu'elle a reçu. Non compris sa propre contribution, elle a 22 euros et 44 centimes.

Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication...
- Algèbre : équation du second degré, racine carrée

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que la somme récoltée ne comprend pas la cotisation de Sandra.
- Procéder par essais successifs à partir d'un effectif supposé jusqu'à obtenir 22,44 euros comme somme reçue par Sandra.
- Organiser les essais en observant les variations des sommes obtenues.
- Présenter ces essais dans un tableau du type :

Nombre d'élèves dans la classe	Cotisation en € de chaque élève	Total à recevoir par Sandra
25	0,50	12 €
30	0,60	17,40 €
35	0,70	23,80 €
34	0,68	**22,44** €

- Conclure : il y a 34 élèves dans la classe.

Ou : proposer une résolution algébrique générale : si n est le nombre d'élèves dans la classe, Sandra a reçu $2n(n–1)$ centimes d'euros. Il faut résoudre l'équation $2n(n–1) = 2244$, avec n entier et trouver la solution, 34.

On peut utiliser la formule générale de résolution de l'équation du deuxième degré après avoir simplifié par 2: $n(n–1) = 1122$ ou $n^2 - n - 1122 = 0 \Rightarrow n = 1+ (\sqrt{1+4488}/2)$ (l'autre n'est pas acceptable parce qu'elle est négative).

On peut aussi procéder en quelques essais successifs, sachant que n est un nombre entier, à partir de $n(n–1) = 1122$.

- Sans recourir à la formule générale on peut encore remarquer que $2(n–1)^2 < 2\,n(n–1) < 2n^2$. En utilisant les racines carrées on a donc
  $n–1 < \sqrt{1122} < n$. comme $\sqrt{1122} \cong 33{,}5$, on a $n = 34$.
- De manière générale, si A est la somme récoltée, on a $n = E(\sqrt{A/2}) + 1$. (où E est la fonction "partie entière")

Niveau : 7, 8, 9, 10

Origine : Franche-Comté

16. FACTORIELLES (Cat. 7, 8, 9, 10)

Anne, Berthe et Claire observent ce tableau de nombres, découvert dans les dernières pages d'un vieux manuel de mathématiques :

1! = 1
2! = 1 x 2 = 2
3! = 1 x 2 x 3 = 6
4! = 1 x 2 x 3 x 4 = 24
5! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 = 120
6! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 = 720
7! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7= 5 040
8! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8 = 40 320
9! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8 x 9 = 362 880
10! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8 x 9 x 10 = 3 628 800
11! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8 x 9 x 10 x 11 = 39 916 800
12! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8 x 9 x 10 x 11 x 12 = 479 001 600
13! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8 x 9 x 10 x 11 x 12 x 13 = 6 227 020 800
14! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8 x 9 x 10 x 11 x 12 x 13 x 14 = 87 178 291 200
...

Anna dit : selon moi, le dernier nombre de la ligne 22! se terminera par quatre zéros.
Berthe dit : selon moi le dernier nombre de la ligne 27! se terminera par cinq zéros.
Claire dit : non, selon moi, le dernier nombre de la ligne 27! se terminera par six zéros.

Et vous, qu'en pensez-vous ?

Dites si les affirmations de chacune des trois amies sont vraies ou fausses, et pourquoi.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication, décomposition en facteurs, numération en base 10

Analyse de la tâche

- Observer le tableau et comprendre la règle de construction. (En mathématiques, on désigne les nombres de chaque ligne par le terme « factorielle ».)
- Vérifier les premières lignes et comprendre que le premier 0 en fin de nombre apparaît avec le couple de facteurs 2 et 5 de la décomposition (car 2 x 5 = 10), c'est-à-dire pour 5! = 120. Comprendre que toutes les lignes successives aboutiront donc à des multiples de 10 et que le deuxième 0 apparaîtra dès la ligne 10 ! avec un nouveau facteur 5 introduit dans la multiplication par 10.
- Considérer alors les nombres suivants qui apparaissent dans les produits et en particulier ceux qui contiennent des facteurs 5 : le troisième 0 en fin de nombre apparaîtra à la ligne 15! (du fait que la multiplication par 15), ce qui peut se vérifier par le calcul.
- De l'analyse des nombres suivants 16 = 2 x 2 x 2 x 2, 17, 18 = 2 x 3 x 3, 19, 20 = 2 x 2 x 5, 21 = 3 x 7, 22 = 2 x11, 23, 24 = 2 x 2 x 2 x 3, 25 = 5 x 5, 26 = 2 x 13 et 27 = 3 x 3 x 3 déduire que le quatrième 0 en fin de nombre apparaît à la ligne 20! et se maintient pour les lignes 21! et 22!, ce qui vérifie l'affirmation d'Anna et qu'à la ligne 25! apparaîtront deux nouveaux 0 en fin de nombre, qui se maintiendront pour les lignes 26! et 27! ce qui contredit l'affirmation de Berthe et vérifie l'affirmation de Claire.

Ou : compter le nombre d'apparitions du facteur 5 dans les différentes décompositions :

dans 5! il apparaît une fois (5) et donc il y a un 0 en fin de nombre
dans 10! il apparaît deux fois (dans 5 et 10) et donc il y a deux 0 en fin de nombre
dans 15! il apparaît trois fois (dans 5, 10 et 15) et donc il y a trois 0 en fin de nombre
dans 20! il apparaît quatre fois (dans 5, 10, 15 et 20) et donc il y a quatre 0 en fin de nombre
dans 25! il apparaît six fois (une fois dans 5, 10, 15, 20 et deux fois dans 25) et donc il y a six 0 en fin de nombre

Ou : Se limiter à décomposer 22! et 27! en facteurs premiers et compter les facteurs 5 qui, associés à autant de facteurs 2, donneront les facteurs 10 des factorielles :

$22\,! = 1 \times 2 \times 3 \times (2^2) \times \mathbf{5} \times (2 \times 3) \times 7 \times (2^3) \times (3^2) \times (2 \times \mathbf{5}) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7) \times (3 \times \mathbf{5}) \times (2^4) \times 17 \times (2 \times 3^2) \times 19 \times (2^2 \times \mathbf{5}) \times (3 \times 7) \times (2 \times 11)$. Il y a 4 facteurs 5, d'où 4 chiffres 0 en fin de 22! .

$27\,! = 1 \times 2 \times 3 \times (2^2) \times \mathbf{5} \times (2 \times 3) \times 7 \times (2^3) \times (3^2) \times (2 \times \mathbf{5}) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7) \times (3 \times \mathbf{5}) \times (2^4) \times 17 \times (2 \times 3^2) \times 19 \times (2^2 \times \mathbf{5}) \times (3 \times 7) \times (2 \times 11) \times 23 \times (2^3 \times 3) \times (\mathbf{5^2}) \times (2 \times 13) \times 27$. Il y a 6 facteurs 5, d'où 6 chiffres 0 en fin de 27!

Catégories : 7, 8, 9, 10

Origine : FJ. selon de nombreux problèmes de concours

17. L'OLIVERAIE (Cat. 8, 9, 10)

Roberto vient d'hériter un terrain rectangulaire de 44 mètres sur 34 mètres, entièrement cultivable.
Il décide d'y planter des oliviers selon les règles en vigueur en Transalpie :
- la distance entre deux arbres (le centre des troncs) doit être de 6 m au minimum,
- la distance entre la limite du terrain et chaque arbre (centre du tronc) doit être de 3 m au minimum.

Combien Roberto pourra-t-il planter d'oliviers, au maximum, sur son nouveau terrain.

Dessinez la disposition de ces oliviers et expliquez comment vous avez procédé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : alignement de points, réseaux, triangle équilatéral
- Arithmétique : mesure de la hauteur du triangle équilatéral

Analyse de la tâche

- Prendre en compte la condition sur les distances entre les arbres et les limites du terrain et constater que la surface sur laquelle on peut planter les oliviers est un rectangle central de 38 (44 - 2 x 3) sur 28 (34 - 2 x 3) mètres.
- Imaginer différents réseaux réguliers de points dont le plus grand nombre sont sur le rectangle central :

  en réseau quadrillé de maille 6 x 6, avec un point dans un angle, on peut placer 7 points sur la longueur et 5 sur la largeur, c'est-à-dire 35 oliviers (figure 1), avec des bandes de terrain « perdu » de 2 (38 – 6 x 6) mètres dans la largeur et 4 m (28 – 4 x 6) dans la longueur ;

  en réseau à maille triangulaire équilatérale, après avoir déterminé la hauteur d'un triangle $3\sqrt{3} = 5,196... \approx 5,2$, il y a deux possibilités :
  - la première en plaçant 7 points sur la longueur, on peut arriver à 39 oliviers en 3 rangs de 7 et trois rangs de 6 (voir figure 2), car les rangs d'ordre pair ne peuvent pas avoir 7 oliviers puisque 6 x 6 + 3 = 39 > 38 ; il y a une bande de terrain « perdu » de 2 m dans la largeur et environ 2 m dans la longueur car $26 \approx 5 \times 5,2$
  - la deuxième (voir figure 3), en plaçant 5 points sur la largeur, on peut arriver à 40 oliviers en 8 rangs de 5. La largeur des bandes de terrain « perdu » est de $38 – 7(3\sqrt{3}) \approx 1,6$ et 28 – (4 x 6 + 3) = 1.

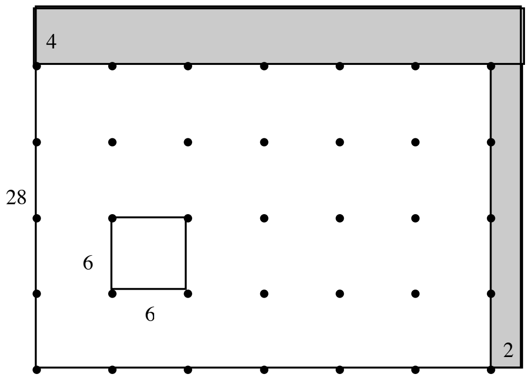


fig 1 38

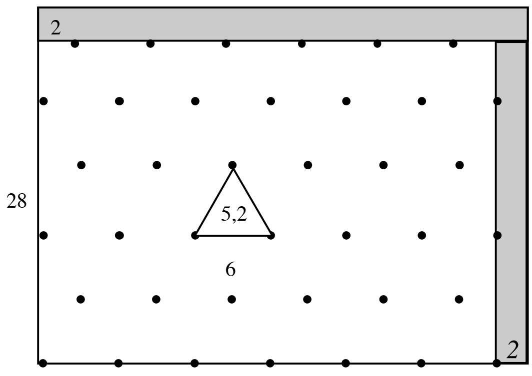
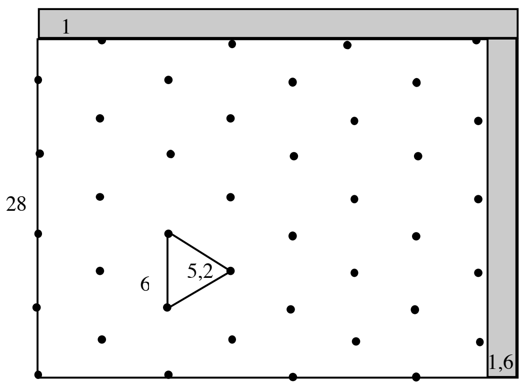


fig 2 38



38

- Placer les points en travaillant éventuellement sur papier millimétré.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Riva del Garda **+** FJ

18. PETIT DEJEUNER AUX CEREALES (Cat. 8, 9, 10)

En prenant son petit-déjeuner, Obélix observe son paquet de « Muesli » et y lit le tableau suivant :

Valeurs énergétique et nutritionnelle moyennes :	pour 40 g de céréales	pour 125 g de lait écrémé	pour 40 g de céréales et 125 g de lait écrémé
	718 kJ (171 kcal)	236 kJ (56 kcal)	954 kJ (227 kcal)
PROTÉINES	3,6 g	4,0 g	7,6 g
GLUCIDES	26,0 g	5,5 g	31,5 g
LIPIDES	5,8 g	2,0 g	7,8 g

Dans ce tableau, les valeurs énergétiques sont calculées en kJ (kiloJoules). Entre parenthèses, elles sont données en kcal (kilocalories), arrondies à l'unité.

Comme Obélix est un peu enveloppé, il est très conscient qu'il ne doit pas forcer sur les calories et sur les lipides en particulier. Il se demande quelle quantité d'énergie et combien de lipides contient son bol dans lequel il met chaque matin un paquet entier de 375 grammes de Muesli et 1 litre de lait écrémé, de 1005 grammes.

Faites les calculs détaillés et déterminez la valeur énergétique et la quantité de lipides du petit-déjeuner d'Obélix.

Donnez les réponses arrondies au kiloJoule (kJ) et kilocalorie (kcal) pour l'énergie et au dixième de gramme (g) pour les lipides.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : proportionnalité, arrondis

Analyse de la tâche

- Déterminer la valeur énergétique du bol d'Obélix en kJ pour les céréales 375 x 718/40 = 6731,25 et pour le lait 1005 x 236/125 = 1897,44 kJ, c'est-à-dire une somme de 8628,69 kJ qui est arrondie à 8629 kJ.
- Vérifier la proportionnalité entre les énergies en kJ et en kcal et déterminer le coefficient à utiliser à partir des rapports donnés : 718/171 = 4,1988... ; 236/56 = 4,2142... ; 954/227 = 4,2026... et vérifier que le rapport utilisé pour effectuer les transformations est 4,2.
- Transformer avec ce rapport moyen 4,2 la valeur énergétique des kJ en kcal : 8 628,69 / 4,2 = 2 054,45 ≈ 2 054 kcal

ou avec l'arrondi précédent : 8 629/4,2 = 2 054,29 ≈ 2 054. (En utilisant l'un ou l'autre des rapports donnés, on obtient : 8 628,69 x 171/718 = 2055 ; 8 628,69 x 56/236 = 2047,5 ; 8 628,69 x 227/954 = 2053,15)

ou faire directement le calcul en kcal : 375 x 171/40 + 1005 x 56/125 = 2 053,36. On peut donc donner 2 054 kcal à 1 kcal près, considérant le deuxième rapport donné dans le tableau comme très approximatif.

- Procéder de la même manière pour les lipides et trouver : 375 x 5,8/40 ≈ 54,4 g pour les céréales et 1005 x 2,0/125 ≈ 16,1 g pour le lait, et par addition, 70,5 g pour tout le petit-déjeuner.

Niveaux : 8, 9, 10

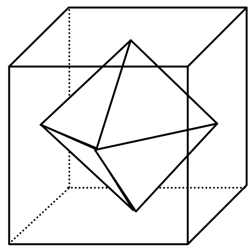
Origine : FJ

19. UN DIAMANT POUR GUINNESS (Cat. 9, 10)

Un précieux diamant de dimensions et d'une brillance exceptionnelles est exposé dans le musée LUX.

Pour le protéger, on a construit une boîte de verre en forme de cube de 10 cm d'arête qui le contient exactement, de façon à ce que chaque sommet du diamant soit au centre d'une face.

Pour proposer ce diamant au « Guinness », il faut donner son volume.



Calculez son volume (en cm^3).

Indiquez comment vous avez procédé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie: octaèdre régulier; carré, triangle équilatéral
- Mesures : volume d'un octaèdre

Analyse de la tâche

- Observer que les arêtes ont toutes la même longueur 5 √2 cm car elles sont les côtés de carrés inscrits aux milieux des côtés des carrés médians du cube (coupes par des plans parallèles à ses faces passant par le centre, en gris sur la figure)
- En déduire que les faces du polyèdre sont 8 triangles équilatéraux,
  qu'il s'agit d'un octaèdre régulier (6 sommets et 12 arêtes).
- Pour calculer le volume, on peut considérer deux pyramides dont la base est le
  carré gris de la figure et la hauteur mesure 5 cm :

  $V=2\cdot\frac{1}{3}50\cdot 5=\frac{500}{3}\approx 167$ (in cm^3)

Ou : observer que l'aire du carré gris est la moitié de celle d'une face du cube et que, par conséquent le volume de chaque pyramide est 1/6 du volume demi-cube. Donc le volume du polyèdre est le 1/6 du volume du cube :

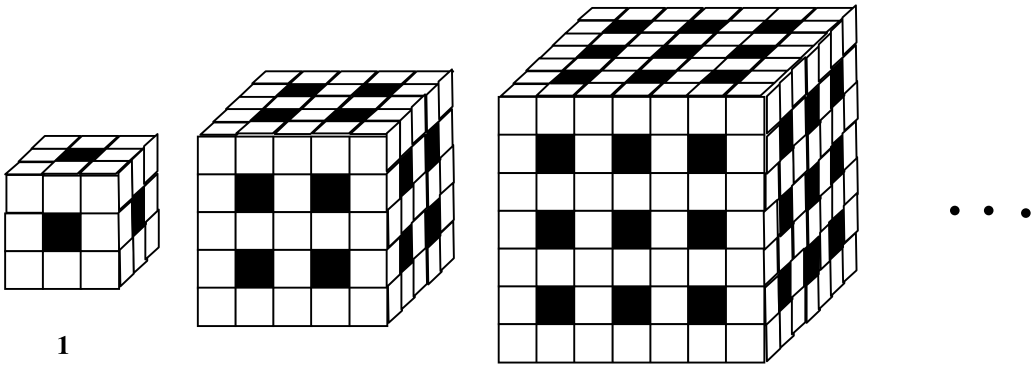
$V= 1000/6 = 500/3 \approx 167$ (in cm^3)

Niveau : 9, 10

Origine : Franche-Comté

20. SOLIDES PERCES (Cat. 9, 10)

Cette figure montre les trois premiers solides d'une suite, de solides, construits avec des cubes tous identiques, collés entre eux :



1 2 3

- le premier solide a été obtenu en perçant de part en part un cube de 3 x 3 x 3 par le centre de chaque face
- le deuxième solide a été obtenu en perçant 4 trous sur chaque face d'un cube de 5 x 5 x 5 qui le traversent de part en part
- le troisième solide a été obtenu en perçant 9 trous sur chaque face d'un cube de 7 x 7 x 7 qui le traversent de part en part
- et ainsi de suite, les solides, qui sont des cubes d'un nombre impair de petits cubes de côté, grandissent et le nombre de trous augmente.

Selon vous, de combien de petits cubes est formé le 17e solide ?

Justifiez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

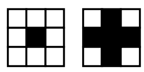
- Géométrie: visualisation spatiale, cube et ses propriétés, volume
- Arithmétique: addition, soustraction, multiplication, puissances
- Algèbre: calcul littéral; suites

Analyse de la tâche

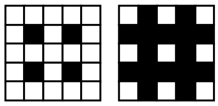
- Observer que les solides de la suite reposent sur des cubes de côté *m*, où *m* désigne le nombre de petits cubes sur une arête, dont on retirera petits cubes des trous pratiqués.
- Comprendre que, si l'on indique par *n* le numéro d'ordre dans la suite des solides, le nombre *m* varie selon la suite des nombres impairs supérieurs à 1 (3, 5, 7, 9, …), et donc $m = 2n+1$, alors que le nombre des trous d'une face du solide de position *n* est n^2.
- Déterminer le nombre de petits cubes des premiers solides de la suite, en cherchant à les « visualiser » pour pouvoir les compter. Par exemple :

  solide 1: formé de 2 plans de 9 -1 = 8 petits cubes

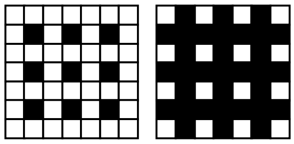
  $m=3$ et de 1 plan intermédiaire de $(3 - 1)^2 = 4$ petits cubes



solide 2: formé de 3 plans de 25 - 4 = 21 petits cubes
$m=5$ et de 2 plans intermédiaire de $(5 - 2)^2 = 9$ petits cubes



solide 3: formé de 4 plans de 49 - 9 = 40 petits cubes
$m=7$ et de 3 plans intermédiaire de $(7 - 3)^2 = 16$ petits cubes



- Se rendre compte qu'il y a une régularité dans la manière de compter les petits cubes des solides examinés :
  solide 1 ($m = 3$) nombre totale des petits cubes : $2 \times (3^2 – 1^2) + 1 \times (3 – 1)^2 = 20$
  solide 2 ($m = 5$) nombre totale des petits cubes : $3 \times (5^2 – 2^2) + 2 \times (5 – 2)^2 = 81$
  solide 3 ($m = 7$) nombre totale des petits cubes : $4 \times (7^2 – 3^2) + 3 \times (7 – 3)^2 = 208$
- Déterminer le nombre de petits cubes du solide demandé, en continuant à appliquer cette règle trouvée jusqu'au 17e.
  solide 4 ($m = 9$) nombre totale des petits cubes : $5 \times (9^2 – 4^2) + 4 \times (9 – 4)^2 = 425$
  ....
  solide 17 ($m = 35$) nombre totale des petits cubes : $18 \times (35^2 – 17^2) + 17 \times (35 – 17)^2$ = **22 356**

Ou : algébriquement, exprimer le lien entre le nombre C_n des petits cubes du solide de rang n en fonction de n et de m :

$$C_n = (n + 1) (m^2 – n^2) + n (m – n)^2,$$

et ensuite seulement en fonction de n en se souvenant que $m = 2n + 1$ et en développant les calculs algébriques :

$$C_n = (n + 1) [(2n + 1)^2 – n^2] + n [(2n+1) – n]^2 = (n + 1)(4n^2 + 5n + 1) = 4n^3 + 9n^2 + 6n + 1.$$

calculer la valeur de C_n pour $n = 17$ ($C_n = 22\,356$).

Ou : en observant les trous, compter les petits cubes qui manquent dans chaque solide. Noter que, puisque chaque trou relie deux faces opposées, il suffit de compter les trous sur trois faces contiguës du solide. Dans une face du solide de rang n, il y a n^2 trous, dont chacun correspond à une perte de $2n + 1$ petits cubes. Les trous des 2 faces contiguës à celle-ci, ne correspondent en revanche qu'à la perte de $(2n + 1) – n$ petits cubes en raison des intersections entre trous. Donc, le nombre des petits cubes manquants dans le solide de rang n est :

$$(2n + 1) n^2 + 2 [(2n + 1) – n] n^2 = n^2 (2n + 1 + 2n + 2) = n^2 (4 n + 3)$$

et le nombre de petits cubes du $n^{\text{ième}}$ solide est $C_n = (2n + 1)^3 – n^2 (4 n + 3) = 4n^3 + 9n^2 + 6n + 1$

Par conséquent, le nombre de petits cubes manquants du 17e solide est : $17^2 \times (4 \times 17 + 3) = 20\,519$ et le nombre de petits cubes de ce solide est donc : $(2 \times 17 + 1)^3 – 20\,519 = 42\,875 – 20\,519 =$ **22 356**.

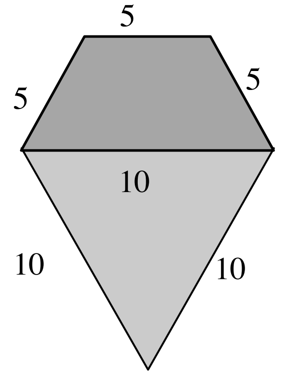
Niveaux : 9, 10

Origine : Siena

21. PYRAMIDES (Cat. 10)

Une pyramide a une base en forme de trapèze isocèle dont trois côtés mesurent 5 cm et le quatrième mesure 10 cm. La plus grande de ses faces est un triangle équilatéral de 10 cm de côté. Les trois autres faces sont des triangles isocèles (qui ne sont pas encore dessinés sur le développement de la pyramide, figure ci-contre).

Début du développement de la pyramide, en réduction:



Dessinez, en vraie grandeur, le développement de cette pyramide (la base et les quatre faces disposées autour de la base) afin d'en construire une maquette par découpage et par pliage.

Laissez les traits de construction sur votre dessin.

Quelle est la hauteur de cette pyramide ?

Expliquez comment vous l'avez trouvée.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : pyramide et son développement, position des faces, mesure de la hauteur d'un triangle, plans perpendiculaires

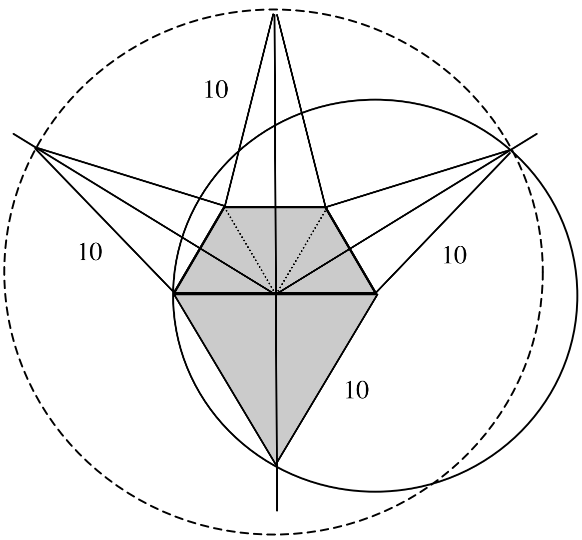
Analyse de la tâche

- Analyser le dessin et imaginer les trois triangles isocèles qui manquent et les quatre faces qui se relèvent après pliage pour se réunir au sommet de la pyramide. (Faire éventuellement quelques essais pratiques)
- Constater d'abord que les deux triangles isocèles (de droite et de gauche) ont chacun un côté qui sera commun avec un des côtés du triangle équilatéral et doit donc mesurer aussi 10 cm.

  En déduire que ces triangles isocèles sont entièrement déterminés : leurs mesures des côtés sont 5, 10 et 10 (il faut éliminer la possibilité 5, 5 et 10 en raison de l'inégalité triangulaire).

  En déduire enfin que le troisième triangle isocèle a deux côtés de 10 cm et que les trois faces isocèles sont isométriques.
- Imaginer les mouvements des faces lorsqu'elles sont relevées pour former la pyramide. Il s'agit de rotations spatiales autour des quatre côtés du trapèze. Pour chaque triangle, le sommet décrit un arc de cercle dans le plan médiateur (vertical) du côté fixe.
- Après avoir constaté que le trapèze est constitué de trois triangles équilatéraux de 5 cm de côté, comprendre que les trois plans verticaux ont pour traces sur le plan horizontal les quatre hauteurs des triangles, qui sont aussi les axes des quatre côtés de la base) et que ces traces concourent au milieu du grand côté de la base.

  En déduire que le sommet de la pyramide se situe à la verticale du milieu du grand côté de la base (commune aux trois plans verticaux) et que, par conséquent la hauteur de la pyramide est celle de la face équilatérale, qui est située dans un plan vertical perpendiculaire à la base.



- Calculer la hauteur du triangle équilatéral de 10 cm de côté, par Pythagore ou à l'aide de la formule $h = c\sqrt{3}/2$
- Exprimer la hauteur, en cm : $h = 5\sqrt{3}$ ou en donner une approximation au dixième près : $h \approx 8{,}7$ ou au centième près : $h \approx 8{,}66$ ...

Niveau: 10

Origine: FJ