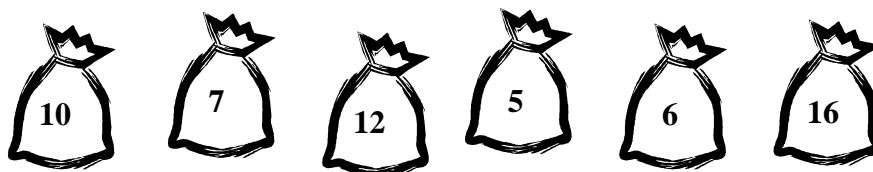


No	titre	3	4	5	6	7	8	Ar.	Alg.	Ge.	Lo.	Orig.
1.	L'âne de Tom	3						x				CH-SI
2.	Nombre à deviner	3	4					x				BB
3.	Qui est le plus vieux ?	3	4								x	SI
4.	La vache dans le verger	3	4							x		CI
5.	Les âges des frères	3	4	5				x			x	FC
6.	Le cycliste		4	5	6			x				BB
7.	Repas de gala		4	5	6			x			x	SI
8.	Le carré de Thomas			5	6					x	x	BB
9.	Joueurs de golf			5	6			x			x	TI
10.	Coupe et découpe			5	6					x		AO
11.	Les bancs du parc			5	6	7		x				FC
12.	La table de jardin				6	7		x		x		SI
13.	Histoire de cubes					7	8	x		x		LU
14.	Le sapin					7	8	x		x		SI
15.	Solidarité pour l'Afrique					7	8	x	x	x		SI
16.	Le marathon de Transalpie					7	8	x	x		x	SI
17.	La nuit de l'excursion					7	8	x				PR
18.	L'horloge digitale						8			x		FC
19.	Le rectangle-puzzle						8			x		FC

1. L'ÂNE DE TOM (Cat. 3)

Tom est allé en ville pour faire ses provisions. Il les a réparties dans 6 sacs qu'il veut faire transporter par son âne jusqu'à sa maison.

Voici les sacs de provisions sur lesquels on a noté leurs poids en kilos.



Tom veut placer tous ces sacs dans les deux grands paniers que son âne porte sur ses flancs, de manière à ce que les deux paniers aient le même poids.

Comment Tom peut-il faire ?

Décrivez toutes les façons de placer les sacs dans les paniers et expliquez comment vous les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations ; décomposition additive d'un nombre.

Analyse de la tâche

- Comprendre l'énoncé pour pouvoir le mathématiser.
- Se rendre compte que si les deux paniers doivent avoir le même poids chacun d'eux doit peser la moitié du total, c'est-à-dire $(10+7+12+5+6+16) : 2 = 28$ kg.
- Chercher à obtenir 28 en utilisant les nombres donnés, après avoir éventuellement remarqué que les deux nombres impairs (7 et 5) doivent être ensemble.
- Découvrir ainsi qu'il y a deux manières de distribuer les sacs dans les paniers, correspondant aux deux égalités numériques : $16 + 7 + 5 = 10 + 6 + 12$ et $12 + 16 = 10 + 7 + 5 + 6$. (Pour trouver la deuxième manière de distribuer les sacs, il faut se libérer de la contrainte imaginaire « 3 sacs dans chaque panier » et penser que la répartition des nombres de sacs peut être inégale (4 et 2) sans influence sur le poids des paniers.)

Ou : procéder par essais en cherchant chaque fois à former avec les nombres donnés deux additions qui donnent le même résultat.

Niveaux : 3

Origine : Châteauroux - Siena

2. NOMBRE À DEVINER (Cat. 3, 4)

Jacques pense à un nombre. Ses camarades doivent le deviner. Pour les aider, il leur donne les renseignements suivants :

- ce nombre est pair.
- le double de ce nombre est plus petit que 100.
- ce nombre est plus grand que 33.
- le chiffre 4 figure une fois seulement dans ce nombre.
- si l'on échange les deux chiffres de ce nombre, on obtient un nombre plus petit que 70 mais plus grand que 50.

Quel est le nombre de Jacques ?

Expliquez comment vous avez fait pour le trouver

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Arithmétique : numération, relation d'ordre, chiffres et nombres, numération de position, double d'un nombre, nombre pair.

Analyse de la tâche

- Comprendre les différentes contraintes du problème.
- Traduire chaque information par une propriété des chiffres du nombre cherché ou par un encadrement.
- Procéder de manière systématique en écartant les nombres qui ne satisfont pas les conditions.
- Déduire, de la deuxième et de la troisième conditions, que les nombres possibles sont compris entre 34 et 49. Parmi ceux-ci, les seuls nombres aussi compatibles avec la première et la quatrième conditions sont le 34, le 40, le 42, le 46 et le 48.
- Écarter le 34, le 40, le 42, et le 48 parce que non compatibles avec la cinquième condition.
- Conclure que le nombre pensé est 46.

Ou : les deuxième et troisième conditions montrent que les nombres possibles sont compris entre 34 et 49 ; la dernière condition donne comme chiffre des unités 5 ou 6 ; la première condition impose 6 comme chiffre des unités : soit 36 ou 46 ; la quatrième condition impose 46

Catégorie : 3, 4

Origine : Bourg-en-Bresse

3. QUI EST LE PLUS VIEUX ? (Cat. 3, 4)

Carole, Jean, Luc, Marie et Pierre sont cinq amis inséparables, bien qu'ils aient tous des âges différents.

- Carole n'est pas la plus jeune du groupe ;
- Pierre est plus âgé que Carole ;
- Jean est le plus âgé des garçons, mais il est plus jeune que Marie.

Classez les noms des cinq amis, du plus âgé au plus jeune.

Expliquez comment vous avez fait pour trouver.

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Logique ; gestion de relations et de conditions ; formulation d'hypothèses.

Analyse de la tâche

- Déduire des première et troisième informations que Marie est la plus âgée de tous.
- Se rendre compte que Carole, selon la première information, ne peut être plus jeune que Luc et donc, selon la deuxième information, qu'elle se situe entre Luc et Pierre.
- Conclure que l'ordre des cinq amis, du plus âgé au plus jeune, est : Marie, Jean, Pierre, Carole, Luc.

Ou : la troisième et la deuxième informations permettent de dire que Jean est plus âgé que Luc, Pierre et Carole et qu'il vient en deuxième position après Marie et avant Carole ; selon la première information, ce sera Luc le dernier.

Ou : placer les enfants par des essais successifs et des corrections, éventuellement à l'aide de noms ou figures mobiles, mais sans être certain que la solution est déterminée de manière unique

Niveau : 3, 4

Origine : Siena

4. LA VACHE DANS LE VERGER (Cat. 3, 4)

Les arbres du verger du père Michel sont très bien alignés. Ils sont représentés par les points noirs sur le plan ci-dessous :

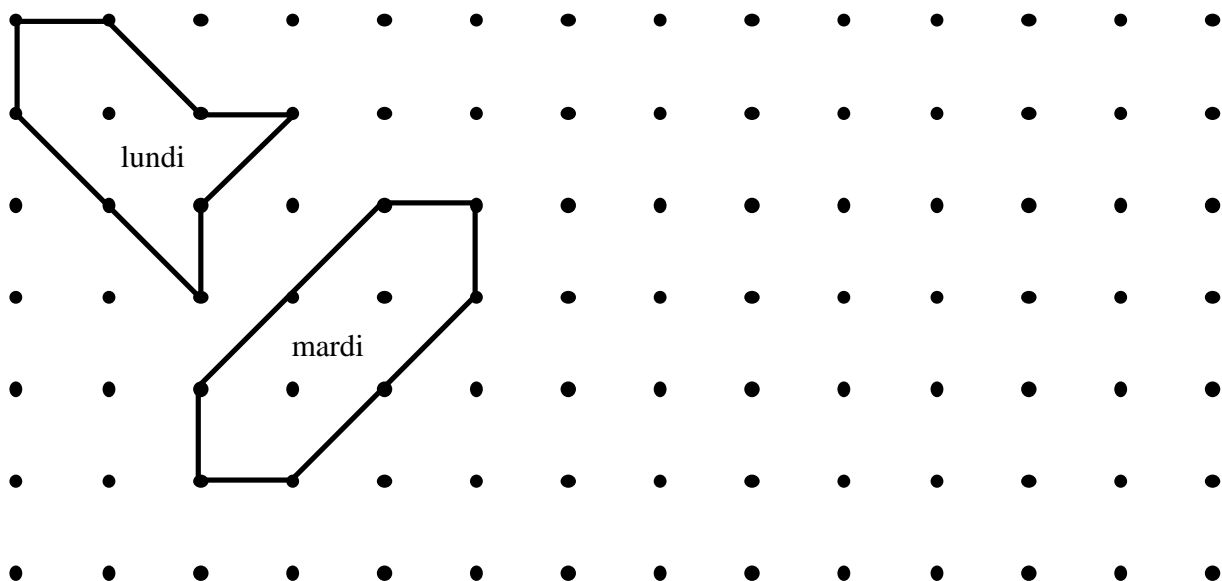
Lundi matin, le père Michel a fait un enclos pour que sa vache, Hortense, puisse brouter l'herbe qui pousse sous les arbres. Il a utilisé 8 barres de bois, 4 grandes et 4 plus petites, qu'il a placées entre 8 troncs d'arbres pour relier un tronc à l'autre.

Lundi soir, Hortense a mangé toute l'herbe de l'enclos, mais elle a encore faim.

Mardi matin, le père Michel fait un nouvel enclos, plus grand que celui du lundi, en utilisant les huit mêmes barres. Hortense aura ainsi plus d'herbe à manger.

Mardi soir, Hortense a tout mangé, mais elle a encore faim.

*Plan du verger du Père Michel
avec la place des enclos de lundi et mardi*



Aidez le père Michel et dessinez un enclos pour mercredi et un autre pour jeudi, de plus en plus grands, pour donner chaque jour plus d'herbe à Hortense.

Mais attention, vous devez toujours utiliser les huit mêmes barres, entre huit arbres.

Expliquez pourquoi votre enclos de mercredi est plus grand que celui de mardi et celui de jeudi plus grand que celui de mercredi.

ANALYSE A PRIORI

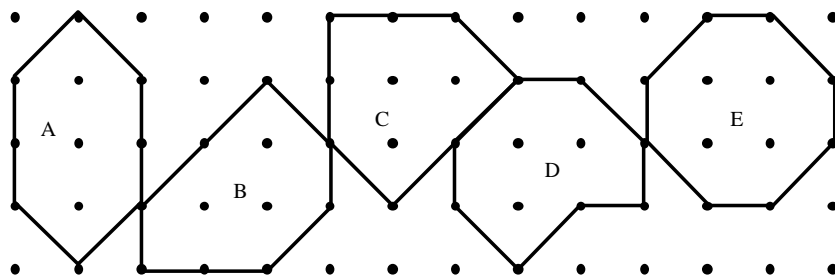
Domaine de connaissances

- Géométrie : propriétés de figures fermées, comparaison de longueurs
- Mesures : recherche d'une unité commune d'aire

Analyse de la tâche

- Interpréter le plan du verger et y repérer les arbres, les barres de longueurs différentes et les différents enclos
- Observer les périmètres des enclos et reconnaître qu'il y a deux sortes de barres, celles dont la longueur correspond à un côté du « quadrillage » ou à une « diagonale ». Constaté que chaque périmètre est composé de quatre barres de chacune des deux sortes.
- Comprendre que « ce qu'il y a à manger » dans l'enclos, ou « plus grand » se réfère à l'aire de l'enclos, dont le périmètre est toujours le même et dont la forme ne semble pas devoir être prise en compte. Chercher alors à comparer les aires pour vérifier que cette grandeur a augmenté et chercher à en trouver une plus grande.
- Trouver que les aires des enclos peuvent s'exprimer en « carrés » et/ou en « triangles » (demi-carrés). Par exemple, l'aire du lundi vaut 2 carrés entiers et 4 triangles, celle du mardi de 3 carrés entiers et 4 triangles.

- Chercher une disposition des perches qui donne une aire plus grande (4 carrés et 4 triangles, puis 5 carrés et 4 triangles) en tenant compte des trois contraintes :
 augmentation de l'aire du mardi au mercredi, découverte d'une des formes A à D
 augmentation de l'aire du mercredi au jeudi,
 respect des longueurs de barres (4 « côtés », 4 « diagonales »)
 (quelques solutions pour le mercredi (A, B, C, D) et la solution pour le jeudi (E))



- Donner une explication montrant qu'il y a un comptage des carrés ou triangles ou nombre de points intérieurs (selon le théorème de Pick, l'aire en carrés vaut le nombre de points intérieurs + la moitié du nombre de points sur la frontière - 1. Les élèves ne peuvent le savoir, mais l'intuition « plus il y a d'arbres à l'intérieur, plus grande est l'aire » est à accepter comme explication).

Niveau : 3, 4

Origine : C.I.

5. LES ÂGES DES FRÈRES (Cat. 3, 4, 5).

Dans une famille, il y a 3 garçons : Antoine, Bernard et Christian, et une fille Denise.

Denise regarde l'album de photos familial et constate que :

- quand Antoine avait 8 ans Bernard avait 12 ans
- quand Bernard avait 9 ans Christian avait 3 ans

Quel âge avait Christian quand Antoine avait 10 ans ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Arithmétique (addition, soustraction)
- Logique
- Mesures (durées)

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que chaque enfant vieillit d'une année en même temps
- En déduire que Christian avait 6 ans (3+3) quand Bernard avait 12 ans (9+3) et Antoine 8 ans
- Conclure que Christian avait 8 ans (6+2) quand Antoine avait 10 ans (8+2).

Ou : faire un schéma temporel du type :

Antoine :	8	...	10	...
Bernard :	9	12
Christian :	3	8	...

Ou :

- considérer que Bernard et Antoine ont 4 années de différence et que Bernard et Christian ont 6 années de différence
- Conclure qu'Antoine a 2 années de plus que Christian. Ainsi, quand Antoine avait 10 ans, Christian en avait 8.

Niveau : 3, 4

Origine : Franche-Comté

6. LE CYCLISTE (Cat. 4, 5, 6)

Un coureur cycliste s'entraîne pendant 5 jours. Il fait chaque jour 6 tours de piste de plus que le jour précédent.

Durant ses 5 jours d'entraînement, il a fait en tout 100 tours de piste.

Combien a-t-il fait de tours de piste chaque jour ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Arithmétique : opérations, nombres en progression arithmétique

Analyse de la tâche

- Comprendre que les nombres de tours de piste effectués pendant chacun des 5 jours sont en progression arithmétique de raison 6 et que 100 est la somme de ces termes.
- Procéder par essais : après avoir choisi un premier nombre et calculé les 4 autres selon une progression arithmétique de raison 6, en faire la somme, comparer le résultat à 100, puis ajuster en conséquence le choix de ce premier nombre (noter que si on ajoute 1 à ce premier nombre, les autres nombres de la suite arithmétique augmentent aussi de 1 et la somme des nombres de cette suite augmente de 5).

Ou : effectuer la division $100 : 5 = 20$; considérer 20 (valeur moyenne) comme nombre central des cinq termes ordonnés à découvrir, et retrouver à partir de celui-ci les quatre autres nombres.

Ou : considérer que chaque jour le cycliste fait le même nombre de tours que le jour précédent, augmenté de 6 ; en 5 jours, le cycliste aura fait alors 5 fois le nombre de tours faits le premier jour, plus 60 autres tours ($6 + 12 + 18 + 24$). Puisque le nombre total de tours est 100, de $(100 - 60) : 5$, on déduit le nombre des tours faits le premier jour, c'est-à-dire 8.

- Conclure que les nombres des tours effectués chacun des 5 jours sont, respectivement, 8, 14, 20, 26, 32.

Niveau : 4, 5, 6

Origine : Bourg-en-Bresse

7. REPAS DE GALA (Cat. 4, 5, 6)

Le restaurant « Au Glouton » prépare sa salle pour le repas de gala des 122 participants d'un congrès. Le restaurateur possède 12 tables de 8 personnes et 12 tables de 6 personnes, mais les organisateurs du congrès ont demandé qu'il n'y ait aucune place vide aux tables utilisées.

Combien de tables de chaque sorte peuvent être préparées pour répondre à la demande des organisateurs.

Indiquez vos solutions et expliquez comment vous les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, division
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Se rendre compte qu'il faut utiliser des tables de 8 ainsi que des tables de 6, vu que 122 n'est divisible par aucun de ces nombres.
- Procéder donc par essais organisés ; par exemple, considérer que $12 \times 8 = 96$ et que, par conséquent, en utilisant toutes les tables de 8 places, il faudrait encore 26 places pour lesquelles 4 tables de 6 places ne suffiraient pas et une 5^e table de 6 places ne serait pas utilisée entièrement. Diminuer alors le nombre des tables de 8 places et se rendre compte qu'avec 10 tables de 8 places et 7 tables de 6 places on réussit à installer la salle selon la demande.
- Après avoir trouvé une première solution, il faut penser qu'il pourrait y en avoir d'autres. Poursuivre donc la recherche, par exemple en diminuant le nombre des tables de 8 et augmentant celui des tables de 6 pour trouver ainsi les autres combinaisons qui donnent une somme de 122. On obtient trois possibilités supplémentaires : 7 tables de 8 places et 11 tables de 6 places, ou 4 tables de 8 places et 15 tables de 6 places ou 1 tables de 8 places et 19 tables de 6 places. Mais, seule la première de ces combinaisons est acceptable, parce qu'il n'y a que 12 tables de 6 places.

Ou : construire un tableau du type

tables de 8	personnes placées	personnes restant à placer	tables de 6 (autres personnes placées)	Personnes restant à placer
12	96	26	4 (24)	2 personnes
11	88	34	5 (30)	4 personnes
10	80	42	7 (42)	0
9	72	50	8 (48)	2 personnes
8	64	58	9 (54)	4 personnes
7	56	66	11 (66)	0
6	48	74	12 (72)	2 personnes
5	40	82	13 (non acceptable)	4 personnes
4	32	90	15 (non acceptable)	0

Ou : compter le nombre total des places disponibles ($12 \times 8 + 12 \times 6 = 148$), se rendre compte qu'il faut éliminer 46 places ($148 - 122$) par « tables complètes » ; on peut faire cela en éliminant 5 tables de 8 personnes et 1 de 6 places ($8 \times 5 + 1 \times 6 = 46$) ou 5 tables de 6 places et 2 de 8 places ($6 \times 5 + 8 \times 2 = 46$). Donc conclure que dans le premier cas il y a 7 tables de 8p. (12-5) et 11 de 6p. (12-1), dans le deuxième cas 10 tables de 8p. (12-2) et 7 tables de 6p. (12-5).

- Conclure qu'il y a deux manières possibles de dresser les tables : 10 tables de 8 places et 7 tables de 6 places ou 7 tables de 8 places et 11 tables de 6 places.

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Siena

8. LE CARRÉ DE THOMAS (Cat. 5, 6)

Dans du carton, Thomas a découpé plusieurs pièces carrées :

- 3 carrés de 1 cm de côté
- 5 carrés de 2 cm de côté
- 5 carrés de 3 cm de côté
- 1 carré de 4 cm de côté
- 1 carré de 5 cm de côté

Il veut assembler toutes ces pièces pour faire un puzzle carré de 10 cm de côté. Les pièces ne doivent pas se chevaucher et il ne doit pas y avoir de vide.

Thomas peut-il former ce grand carré avec toutes les pièces qu'il a découpées ? Expliquez pourquoi.

Dessinez ce carré de 10 cm de côté et les pièces que vous avez utilisées pour le former.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie et mesure (carré, aire, pavages)
- Logique : raisonnement, déduction

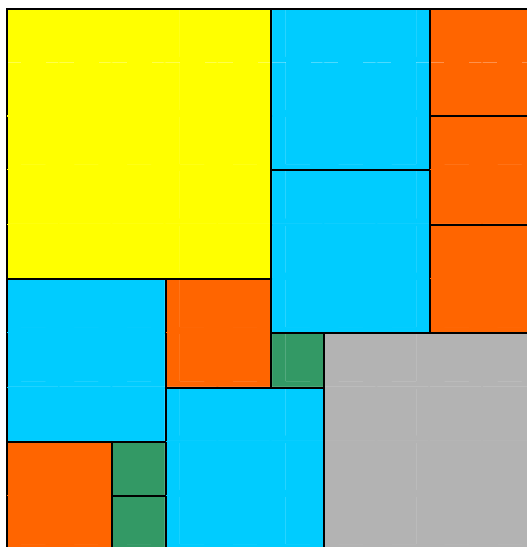
Analyse de la tâche

- Comprendre qu'on ne peut utiliser que des pièces carrées des dimensions indiquées pour construire le grand carré.
- Calculer la mesure de l'aire du grand carré en cm² (ou le nombre total de carrés de 1 cm de côté), c'est-à-dire 100, et calculer la mesure de l'aire totale des petits carrés (109 cm²), en déduire qu'il y a une pièce de 9 cm² en plus, ce qui correspond à un carré de 3 cm de côté.
- Essayer de réaliser le grand carré avec les pièces qui restent (par exemple en découpant les pièces données et en les disposant sur un carré 10 x 10 ou en dessinant un quadrillage 10 x 10 et en le subdivisant en carrés de dimensions souhaitées).

Ou : procéder par essais en cherchant à réaliser le carré avec les pièces données et en constatant qu'il reste toujours un carré de 3 cm de côté.

Ou : après avoir remarqué que le carré de côté 5 cm ne peut être éliminé, constater que 10 cm peut-être réalisé comme 5 cm + 3 cm + 2 cm ou comme 5 cm + 3 cm + 1 cm + 1 cm ou comme 5 cm + 2 cm + 2 cm + 1 cm ou comme 5 cm + 4 cm + 1 cm ou comme 5 cm + 2 cm + 1 cm + 1 cm + 1 cm, ce qui détermine les carrés qui peuvent être adjoints au carré de 5 cm. Par essais et déductions, un pavage peut être réalisé (il en existe de nombreux).

Exemple d'assemblage possible :



Niveau : 5, 6

Origine : Bourg-en-Bresse

9. JOUEURS DE GOLF (Cat. 5, 6)

Au golf, Claude s'entraîne à tirer des balles dans un trou. Il dit à son ami André :

« Je te donne 2 euros chaque fois que je manque le trou mais tu me donnes 1 euro chaque fois que je mets la balle dedans ». André accepte le défi.

Après 18 tirs, André doit 3 euros à Claude.

Combien de tirs Claude a-t-il manqués ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Arithmétique : multiplication et soustraction

Analyse de la tâche

- Comprendre que la somme des tirs réussis et des tirs manqués est 18.
- Comprendre que le résultat final est la différence entre les euros que André doit à Claude et ceux que Claude doit à André.
- Comprendre que si Claude a réussi tous ses tirs André lui doit 18 euros, ou que s'il les a tous manqués, il doit payer 36 euros à André.
- En partant d'une de ces deux constatations, modifier progressivement le nombre des tirs réussis ou manqués et calculer ce que André doit payer, jusqu'à trouver la solution : 13 tirs réussis et 5 manqués.

Ou : Supposer qu'il y a eu autant de tirs bien ajustés que de tirs manqués, c'est-à-dire 9 et 9, et procéder comme précédemment.

Ou : Supposer par exemple que les 18 tirs ont été réussis. Claude devrait alors recevoir 18 euros. Procéder en remplaçant une réussite par un échec et se rendre compte que la somme totale initiale (18) diminue de 3; comprendre que, avec 5 échecs la somme initiale diminue de 15 et qu'il reste alors 3 euros à Claude.

Ou : Comprendre que pour chaque tir manqué, il faut deux réussites pour compenser. Se rendre compte que Claude, avec un crédit positif de 3 euros, a forcément eu 3 réussites et que, pour les 15 autres tirs, les réussites et les échecs se sont compensés, et que par conséquent il y a eu 10 tirs gagnants et 5 manqués.

Ou : essais systématiques : 18 réussis, 17 réussis, 16 réussis....

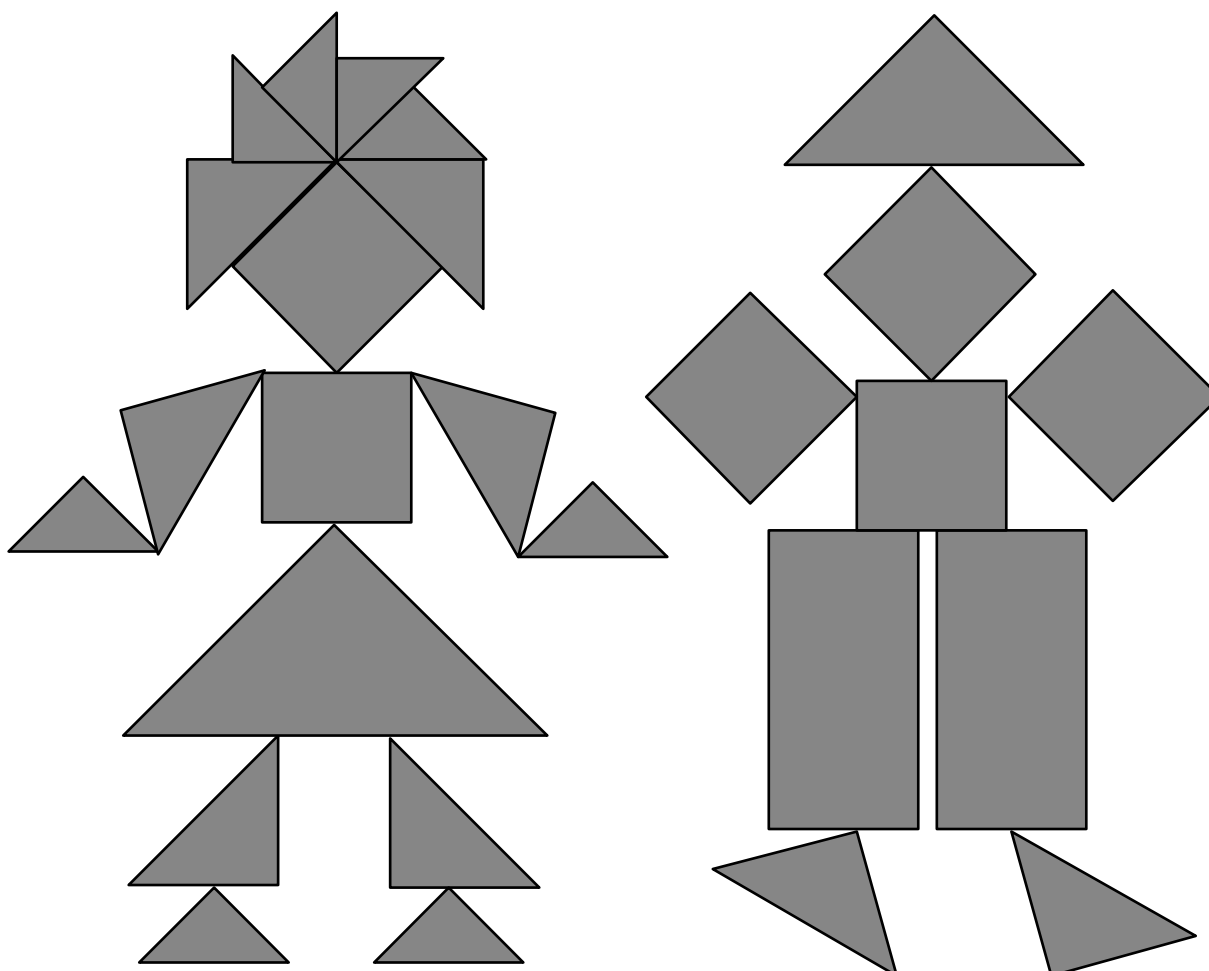
Ou : trouver les possibilités par essais non organisés, ce qui ne garantit pas l'unicité de la solution.

Niveaux : 5, 6

Origine : Canton de Ticino

10. COUPE ET DÉCOUPE (Cat.5, 6)

En collant des pièces qu'il avait découpées dans du carton, Aldo a fait un tableau qui représente deux personnages : une fillette à gauche et un garçon à droite.



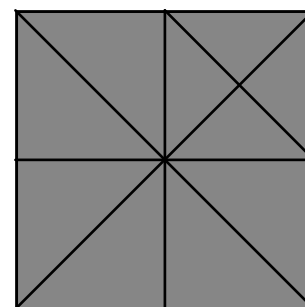
Selon vous, pour faire son tableau, Aldo a-t-il utilisé plus de carton pour la fillette ou pour le garçon ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Pour préparer les pièces de son tableau, Aldo a utilisé plusieurs feuilles de carton, carrées et de même grandeur.

Il les a pliées une, deux ou trois fois, puis découpées en suivant certains des plis obtenus.

Cette figure montre une feuille carrée de carton et les différents pliages qu'Aldo a pu effectuer :



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : surfaces d'aires équivalentes
- Mesures d'aires

Analyse de la tâche

- Analyser le tableau et reconnaître ses différents éléments (des triangles rectangles isocèles de quatre grandeurs différentes, des carrés et des rectangles), par mesurage ou découpage et superposition.
- Établir des relations entre les pièces et constater qu'elles peuvent être décomposées ou pavées en n'utilisant qu'une seule unité : le petit triangle (qu'on trouve sur le dessus de la chevelure de la fillette).
- Décomposer toutes les formes en petits triangles unités et déterminer l'aire par comptage. Trouver ainsi qu'il faut 36 triangles-unités pour réaliser la figure de la fillette et 40 pour celle du garçon.

Ou utiliser d'autres unités comme le triangle « double du petit » ou le carré (équivalent à 4 petits triangles ou à l'un des triangles valant le quart d'une feuille de carton).

Ou, par compensation, juxtaposer les formes géométriques qui composent la fillette à d'autres équivalentes composant le garçon, pour finalement trouver que ce dernier nécessite plus de carton.

Niveau : 5, 6

Origine : Vallée d'Aoste

11. LES BANCS DU PARC (Cat. 5, 6,7)

Dans un grand parc, il y a deux sortes de bancs : des bancs à deux places et des bancs à trois places.

Il y a 15 bancs à deux places de plus que de bancs à trois places

Il y a en tout 185 places assises sur les bancs du parc.

Combien ce parc compte-t-il de bancs en tout ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Arithmétique (les 4 opérations)

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que s'il y avait autant de bancs à 3 places que de bancs à 2 places, il suffirait de diviser par 5 le nombre de places assises, pour trouver le nombre de bancs.
- Remarquer que les 15 bancs supplémentaires à 2 places offrent 30 places assises.
- En enlevant ces 30 places des 185, on trouve 155 places.
- Et la division de 155 par 5 donne 31. C'est donc qu'il y a 31 bancs à 3 places et $31+15 = 46$ bancs à 2 places, d'où $77 = 31 + 46$ bancs en tout dans le parc.

Ou : Après avoir divisé 185 par 5 ($185 : 5 = 37$), diminuer progressivement le nombre de bancs à 3 places et augmenter le nombre de bancs à deux places, en considérant que 2 bancs à 3 places équivalent à 3 bancs à 2 places. Continuer ainsi jusqu'à ce que la différence entre le nombre de bancs à 2 places et ceux à 3 places soit 15.

Représenter éventuellement le procédé dans un tableau de ce genre :

<i>Nombre de bancs à 2 places</i>	<i>37</i>	<i>40</i>	<i>43</i>	<i>46</i>
Nombre de bancs à 3 places	37	35	33	31
Différence	0	5	10	15

Ou : choisir un nombre d'un nombre fictif (par exemple 70) de bancs à 2 places, diminuer successivement le nombre des bancs de 2 places et augmenter celui des bancs de 3 places, en considérant que 2 bancs à 3 places équivalent à 3 bancs à 2 places. La bonne solution est celle où la différence est 15. (s'aider éventuellement d'un tableau comme le suivant.)

Nombre de bancs à 2 places	70	67	64	61	58	55	52	49	46	43	40	37
Nombre de bancs à 3 places	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37
Différence	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0

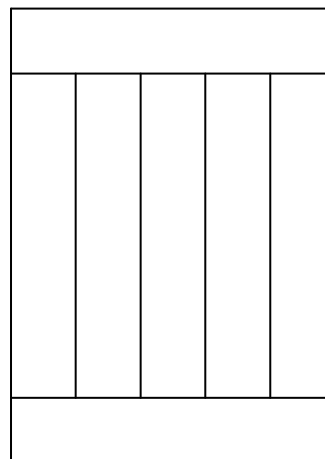
Niveau : 5, 6, 7

Origine : Franche-Comté

12. LA TABLE DE JARDIN (Cat. 6, 7)

Le papa de Luc a construit une table de jardin rectangulaire en utilisant 7 planches de bois identiques, ayant chacune un périmètre de 3 m.

Voici le dessin du plateau de la table, comme il se présente à la fin de la construction.



Quelle est la longueur et la largeur de cette table de jardin ?

Donnez votre réponse et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Géométrie : périmètre, rectangle et décomposition du rectangle
- Arithmétique : les 4 opérations

Analyse de la tâche

- Remarquer sur le dessin que la longueur d'une planche est 5 fois sa largeur, et que, par conséquent son périmètre est 12 fois sa largeur ($2 \times 5 + 2 \times 1$). Il s'ensuit que la largeur d'une planche est 25 cm ($300 : 12$).
- Par conséquent, la largeur et la longueur du plateau valent, respectivement, 5 et 7 fois la largeur d'une planche, les dimensions de la table sont donc 125 cm (25×5) et 175 cm (25×7).

Ou : on peut aussi remarquer sur le dessin que le périmètre du plateau peut s'exprimer au moyen des côtés d'une planche, puisqu'il est formé de 4 largeurs et 4 longueurs. Il s'ensuit que le périmètre du plateau est 2 fois celui d'une planche, c'est-à-dire 600 cm (300×2). Noter ensuite que la longueur est 5 fois la largeur et que par conséquent le périmètre de la table correspond à 24 fois la largeur d'une planche ; en déduire que $(600 : 24) \times 5 = 125$ (cm) est la largeur de la table, alors que la longueur est $(600 : 24) \times 7 = 175$, en cm-

Niveaux : 6, 7

Origine : Siena

13. HISTOIRE DE CUBES (Cat. 7, 8)

Philippe possède une boîte de jeu contenant 220 petits cubes en bois dont les côtés mesurent exactement 1 cm. Avec ces cubes, Philippe construit le cube le plus grand possible. À la fin, il ne lui reste que quelques petits cubes.

Combien de petits cubes Philippe a-t-il utilisés pour sa construction ?

Quand Philippe est parti, sa sœur Anne renverse le grand cube et essaie de construire plusieurs cubes, tous de tailles différentes. Quand elle a fini son travail, elle a devant elle les cubes qu'elle a construits et elle constate qu'elle a utilisé exactement le même nombre de petits cubes que son frère.

Quelle est la longueur des arêtes de chacun des cubes qu'Anne a construits ?

Justifiez vos réponses.

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Arithmétique : opérations sur les nombres naturels
- Géométrie : volume du cube

Analyse de la tâche

- Savoir que si k est le nombre de petits cubes disposés sur une arête d'un cube, le nombre total des petits cubes qui forment le cube est $k \times k \times k = k^3$.
- Considérer alors la séquence des premiers nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... et écrire leurs cubes respectifs : 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, ... et s'arrêter à 220. En déduire que le cube de Philippe est composé de 216 (6^3) petits cubes.
- Comprendre que Anne, pour pouvoir réaliser des cubes différents, ne peut pas en construire seulement deux, parce que les choix possibles se font parmi les cubes de 125, 64, 27, 8 et 1 petits cubes : $216 - 125 = 91$, $216 - 64 = 152$, $216 - 27 = 189$, $216 - 8 = 208$, $216 - 1 = 215$ ne sont pas des nombres cubiques.
- Observer qu'Anne doit construire au moins 3 cubes et trouver (par essais) que l'unique possibilité d'obtenir 216 comme somme de trois nombres cubiques est $125 + 64 + 27$.
- Conclure alors qu'Anne a construit 3 cubes d'arêtes respectives 5cm, 4cm, 3cm.
- Remarquer que, avec plus de 3 cubes, il n'est pas possible de respecter la contrainte des cubes tous différents (déjà avec 4 des cinq nombres possibles (1, 8, 27, 64, 125) on ne peut obtenir 216 sans répétition).

Niveaux : 7, 8

Origine : Luxembourg

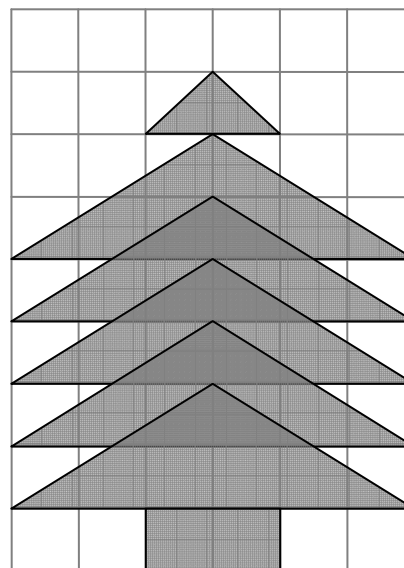
14. LE SAPIN (Cat. 7, 8)

Un sapin est dessiné sur une feuille de papier quadrillé : le tronc est un rectangle formé de deux carrés, alors que le reste du sapin est formé de cinq triangles égaux, partiellement superposés, et d'un triangle plus petit qui constitue la pointe.

Marie observe le dessin et est convaincue que la partie de la feuille occupée par le sapin est plus grande que celle qui reste.

Pensez-vous que Marie a raison ?

Donnez votre réponse et justifiez votre raisonnement.

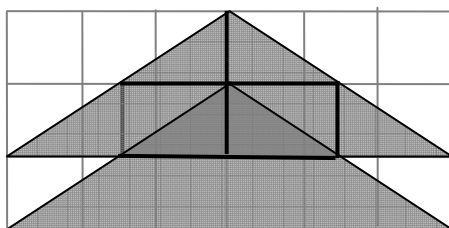
**ANALYSE A PRIORI****Domaine de connaissances**

Géométrie : comparaisons d'aires, décomposition, équivalence, isométries (symétrie), similitude.

Arithmétique : opérations, fractions.

Analyse de la tâche

- Choisir le carré du quadrillage comme unité de mesure pour l'aire.
- Observer que le sapin est formé d'un rectangle de 2 carrés, de 5 grands triangles isocèles égaux qui se superposent de manière à avoir toujours la moitié de leur hauteur relative au côté horizontal en commun, et d'un petit triangle, isocèle lui aussi, équivalent à un carré-unité.
- Comprendre que l'aire d'un des cinq grands triangles égaux est de 6 carrés (chaque triangle se recompose en un rectangle de 6 carrés).
- Pour évaluer l'aire de la région constituée des cinq grands triangles partiellement superposés, effectuer le découpage suivant :



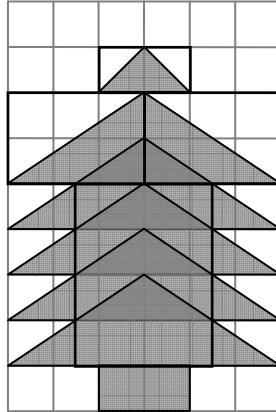
Observer que chacun de ces triangles peut être subdivisé en huit petits triangles rectangles égaux, ayant chacun la même hauteur, l'autre côté de l'angle droit étant en commun ou étant opposé dans un parallélogramme.

L'aire de chaque partie se chevauchant est donc celle de 2 petits triangles rectangles, soit $\frac{1}{4}$ de l'aire d'un grand triangle. Il y a 4 telles parties se chevauchant dont l'aire totale est donc celle d'un grand triangle. L'aire de la partie du sapin constituée par les 5 grands triangles se chevauchant vaut donc $4 \times 6 = 24$ carrés unités. Rajoutant les 2 carrés du tronc et 1 carré pour la cime, cela donne une aire totale de 27 carrés unités.

Ou : pour des raisons de symétrie de la figure, on peut travailler seulement sur un demi-sapin, à gauche ou à droite, et évaluer, avec des considérations analogues à ce qui précède, l'aire de la région constituée des cinq grands triangles rectangles superposés.

- Puisque l'aire de la feuille entière est $54 = 6 \times 9$ carrés, en déduire que l'aire de la partie non occupée par le sapin est encore de 27 carrés.

Ou : procéder en cherchant à déterminer dans la figure des parties blanches et grises qui se compensent, par exemple par une subdivision du genre :



- Conclure que Marie n'a pas raison : les deux parties de la feuille ont la même aire.

[Solution experte pour le calcul de l'aire des triangles de chevauchement : faire intervenir la similitude en considérant que le rapport de similitude entre la partie triangulaire superposée et le triangle entier est $1/2$ et par conséquent le rapport des aires est $1/4$].

Niveaux : 7, 8

Origine : Siena

15. SOLIDARITÉ POUR L'AFRIQUE (Cat.7, 8)

Laurent et ses amis ont collecté 5900 euros pour acheter des sommiers et matelas à envoyer en Afrique pour équiper un hôpital. Ils doivent dépenser exactement ce montant récolté.

Dans un grand centre commercial, ils ont trouvé des bons matelas au prix de 120 euros et d'excellents sommiers au prix de 70 euros. Ils se rendent compte qu'ils ne peuvent pas acheter le même nombre de sommiers et de matelas pour n'avoir que des lits complets : composés d'un sommier et d'un matelas.

Laurent décide alors d'organiser les achats afin d'obtenir le maximum de lits complets et d'utiliser entièrement le reste des fonds disponibles en achetant des sommiers ou des matelas supplémentaires.

Combien de matelas et combien de sommiers Laurent et ses amis ont-ils achetés ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Arithmétique : les quatre opérations, multiples.
- Algèbre : équations à deux variables à solutions entières positives.
- Logique : recherche systématique.

Analyse de la tâche

- Comprendre, comme il est indiqué dans l'énoncé, qu'il est impossible d'acheter des lits complets avec le montant disponible, parce que 5900 n'est pas un multiple de 190 (120 + 70). En fait, $5900 = 31 \times 190 + 10$.
- Organiser une recherche en partant du haut : étant donné qu'il n'est pas possible d'acheter 31 couples sommier-matelas, car il reste 10 euros, essayer premièrement avec 30. Il resterait 200 euros ($5900 - 190 \times 30$), mais ce nombre n'est divisible ni par 70, ni par 120. On ne peut pas utiliser ainsi entièrement la somme des 5900 euros. Réduire le nombre N de couples sommier-matelas jusqu'à ce que le reste soit divisible ou par 70 ou par 120. Construire alors un tableau du genre :

N : Nombre de lits complets	Différence entre 5900 et $190 \times N$
31	10
30	200
29	390
28	580
27	770

- Observer que le premier des restes qui satisfait la condition précédente est 770, multiple de 70.
- Conclure que Lorenzo achètera 27 couples sommier-matelas et 11 sommiers supplémentaires ; donc 27 matelas et 38 sommiers.

Ou aborder le problème algébriquement en désignant par x le nombre de matelas et y le nombre de sommiers, et traduire les contraintes du problème par la relation $120x + 70y = 5900$, qui est une équation qui se réduit à $12x + 7y = 590$.

- Rechercher les solutions entières positives, de l'équation précédente, par essais organisés, par des tableaux de valeurs, etc. pour trouver les 7 couples (6 ; 74), (13 ; 62), (20 ; 50), (27 ; 38), (34 ; 26), (41 ; 14), (48 ; 2).
- Choisir, parmi les 7 solutions trouvées, celle qui permet de former le plus grand nombre de lits complets : c'est-à-dire 27 matelas et 38 sommiers.

Niveaux : 7, 8

Origine : Siena

16. LE MARATHON DE TRANSALPIE (Cat. 7, 8)

Michel et Philippe ont décidé de s'inscrire au grand Marathon de Transalpie et viennent de recevoir les numéros de leurs dossards.

On sait que :

- il s'agit de deux nombres entiers consécutifs supérieurs à 100 et inférieurs à 1 000 ;
- pour écrire ces deux nombres, on n'utilise que deux chiffres différents ;
- la somme des six chiffres qui composent les deux nombres est 39.

Quels peuvent être les deux numéros de dossards de Michel et de Philippe.

Expliquez comment vous les avez trouvés ?

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Arithmétique : chiffres et nombres, écriture décimale de position.
- Logique : déduction, raisonnement de type combinatoire.
- Calcul littéral.

Analyse de la tâche

- Comprendre que pour écrire deux nombres consécutifs de trois chiffres en n'utilisant que deux chiffres différents, ces deux derniers doivent aussi être « consécutifs ». Les choix doivent s'opérer entre les couples de chiffres suivants : 1 - 2 ; 2 - 3 ; 3 - 4 ; 4 - 5 ; 5 - 6 ; 6 - 7 ; 7 - 8 ; 8 - 9 (le couple 0 - 1 est exclu car les nombres sont supérieurs à 100)
- Se rendre compte que les deux nombres consécutifs cherchés doivent avoir le même chiffre des centaines et le même chiffre des dizaines, (éventuellement différent de celui des centaines) et des chiffres différents pour les unités.
- On peut faire un calcul littéral : désignant par x et y , tels que $y = x + 1$, les deux chiffres des unités, les nombres cherchés sont de la forme : xxx et xyx ; xyx et xyy ; yxx et yxy ou yyx et yyy . La somme des chiffres est respectivement : $6x + 1$ (1^{er} couple), $6x + 3$ (2^e et 3^e couple), $6x + 5$ (4^e couple). Comme elle doit valoir 39, l'unique somme acceptable est $6x + 3$ (pour que x soit un nombre entier). L'équation $6x + 3 = 39$ donne la solution $x = 6$, puis $y = 7$. Avec les chiffres 6 et 7 il y a deux couples de nombres consécutifs 676 et 677 ou 766 et 767. Le problème admet donc deux solutions.

Ou : on peut aussi arriver à la même conclusion en considérant les couples de nombres consécutifs de trois chiffres qu'on peut former avec chacun des couples de chiffres consécutifs identifiés précédemment. On trouve à chaque fois quatre couples de nombres consécutifs, par exemple avec 3 et 4 : (333, 334); (343, 344) ; (433, 434) ; (443, 444) dont la somme des chiffres est respectivement 19, 21 et 23. Comme les sommes de cet exemple sont trop petites, il faut passer successivement aux couples de chiffres suivants. On peut faciliter la recherche en notant que pour passer d'un couple de chiffres à l'autre, la « somme » des chiffres augmente de 6 au maximum (par exemple, la somme maximale obtenue avec 4 et 5 est 29 et, par conséquent, le 39 s'obtient avec les chiffres 6 et 7).

Ou : diviser 39 par 6 et trouver 6 et un reste de 3, et comprendre qu'il faudra trois 6 et trois 7 pour obtenir 39.

Ou : trouver les chiffres 6 et 7 par essais non organisés, avec le risque de se contenter d'une seule solution.

Niveaux : 7, 8

Origine : Siena

17. LA NUIT DE L'EXCURSION (Cat. 7, 8)

Les classes de l'institut « Archimède » vont en excursion à Naples. Elles arrivent à l'hôtel « Vésuve » où les élèves passeront la nuit. L'hôtel met à leur disposition trois chambres à 5 lits, quatre chambres à 4 lits, et huit chambres à 3 lits. Tous les lits seront occupés.

La classe A est composée de 20 élèves, dont 7 garçons, la classe B de 18 élèves, dont 8 garçons, alors qu'il n'y a que 6 garçons dans la classe C.

Est-il possible de loger les élèves dans les chambres mises à disposition par l'hôtel de manière à ce que, dans chaque chambre, il n'y ait que des garçons de la même classe ou que des filles de la même classe ?

Comment peut-on répartir les élèves ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Arithmétique : addition, multiplication, décomposition de nombres.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il doit y avoir 55 élèves, d'après le nombre des lits tous occupés ($3 \times 5 + 4 \times 4 + 8 \times 3$) et que par conséquent, il y a 11 filles dans la classe C ($55 - 20 - 18 - 6$).
- Comprendre que la distribution de certains groupes d'élèves dans les chambres est imposée : les 7 garçons de la classe A occuperont une chambre triple et une quadruple ; les 6 garçons de la classe C occuperont deux chambres triples.
- Distribuer les chambres encore disponibles (trois chambres de 5 lits, trois chambres de 4 lits, cinq chambres de 3 lits) entre les élèves qui restent, en décomposant les effectifs des quatre groupes (8 garçons de B, 13 filles de A, 10 filles de B et 11 filles de C) en sommes de nombres 3, 4 et 5 :

$$\begin{array}{lll} \mathbf{8} = 4 + 4 & \text{ou} & \mathbf{8} = 5 + 3 \\ \mathbf{13} = 3 + 3 + 3 + 4 & \text{ou} & \mathbf{13} = 5 + 4 + 4 \quad \text{ou} \quad \mathbf{13} = 5 + 5 + 3 \\ \mathbf{10} = 5 + 5 & \text{ou} & \mathbf{10} = 3 + 3 + 4 \\ \mathbf{11} = 3 + 3 + 5 & \text{ou} & \mathbf{11} = 3 + 4 + 4 \end{array}$$

- On peut procéder de différentes manières pour organiser l'inventaire des possibilités, par exemple au moyen de diagrammes en arbre ou d'autres graphiques, mais toujours de manière systématique.

Il reste 5 combinaisons possibles, après éliminations ;

$$\begin{array}{llll} 8 = 4 + 4 & 13 = 3 + 3 + 3 + 4 & 10 = 5 + 5 & 11 = 3 + 3 + 5 \\ 8 = 5 + 3 & 13 = 3 + 3 + 3 + 4 & 10 = 5 + 5 & 11 = 3 + 4 + 4 \\ 8 = 4 + 4 & 13 = 5 + 5 + 3 & 10 = 3 + 3 + 4 & 11 = 3 + 3 + 5 \\ 8 = 5 + 3 & 13 = 5 + 5 + 3 & 10 = 3 + 3 + 4 & 11 = 3 + 4 + 4 \\ 8 = 5 + 3 & 13 = 4 + 4 + 5 & 10 = 3 + 3 + 4 & 11 = 3 + 3 + 5 \end{array}$$

Niveaux : 7, 8

Origine : Parma

18. L'HORLOGE DIGITALE (Cat. 8)

Au mur de son bureau, Sabine vient d'accrocher une horloge digitale qui indique les heures et les minutes, avec des chiffres comme ceux-ci :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Par exemple, le soir à 8 heures moins le quart, l'horloge indique :

19:45

Comme elle a un rendez-vous de travail en milieu de journée, Sabine regarde rapidement l'heure et s'aperçoit qu'il est temps qu'elle parte.

Mais elle ne s'est pas rendu compte qu'elle avait en fait regardé l'image de son horloge qui se reflétait dans son grand miroir accroché au mur devant elle, en face de l'horloge.

Elle arriva à son rendez-vous avec 20 minutes d'avance.

Quelle heure était-il réellement quand elle a regardé son horloge dans son miroir ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI**Domaine de connaissances**

- Géométrie (symétrie axiale ou réflexion)
- Mesure du temps

Analyse de la tâche

- Savoir que l'image d'un objet dans un miroir est obtenue par une symétrie d'axe vertical de cet objet.
- Comprendre que les chiffres des minutes donneront par symétrie les chiffres des heures dans l'ordre inverse et vice-versa.
- Ne retenir comme chiffres possibles parmi les 10 que ceux qui par symétrie d'axe vertical donnent encore des chiffres. Ce sont :

0 1 2 5 8

- Éliminer le 8, car en position extrême il ne peut être une dizaine d'heures et en position moyenne il ne peut être une dizaine de minutes.
- Étudier chacune des 24 permutations possibles des 4 autres chiffres, pour ne retenir que celles qui donnent par symétrie des heures différentes de 20 mn, Sabine étant partie 20 mn trop tôt. Il y a 3 couples satisfaisants :

01:50 → 02:10 11:51 → 12:11
21:55 → 22:15

La mi-journée se situant vers midi, l'heure qu'il était réellement quand Sabine a regardé son horloge dans son miroir était donc 11 h 51.

Ou : sélectionner d'abord les couples des minutes qui peuvent donner une différence de 20 mn par symétrie :

00-20 ; 01-21 ; 02-22 ; 05-25 ; 50-10 ; 51-11 ; 52-12 ; 55-15

Déduire ensuite les couples possibles associés à ceux des heures (en tenant compte que 02-22, 05-25, 52-12 doivent être exclus parce que leurs symétriques ne désignent pas d'heures)

05:00 et 00:20 ; 15:01 et 10:21 ; 12:11 et 11:51 ; 22:15 et 21:55 ; 02:10 et 01:50

Écarter les deux premiers parce qu'ils ne donnent pas une différence de 20 minutes et les deux derniers car ils ne sont pas en milieu de journée.

Ou : comprendre que pour l'heure, il n'y a que deux possibilités : 11 ou 12 parce que les autres combinaisons des autres chiffres donnent des heures « lointaines » de midi. (00, 01, 02, 05, 10, 15, 20, 21, 22).

- Se rendre compte que si, par exemple, Sabine lit 11:_ _ dans le miroir, cela signifie qu'il s'agit de _ _:11 sur l'horloge. D'autre part, les minutes lues sur l'image dans le miroir ne peuvent être que 11 ou 51 vu que leurs images symétriques doivent indiquer sur l'horloge une heure qui soit « proche » de midi, sinon la différence entre l'heure réfléchie et l'heure effective serait trop grande.

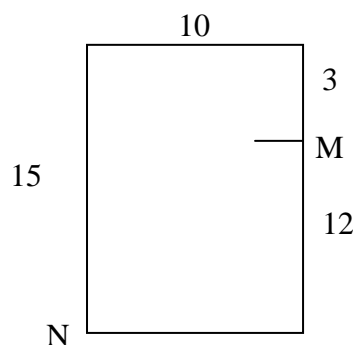
- Vérifier que l'heure lue par Sabine ne peut être 11:11 parce que ce serait la même que celle de l'horloge. Et si l'heure lue était 11:51, l'horloge indiquerait 12:11 et Sabine arriverait en retard de 20 minutes et non en avance.
- Conclure alors que Sabine lit 12:11 dans le miroir et que l'horloge indique 11:51.

Niveau : 8

Origine : Franche-Comté

19. LE RECTANGLE-PUZZLE (Cat. 8)

Le dessin représente un rectangle de 15 cm sur 10 cm. Le petit trait indique le point M qui partage un grand côté en deux segments de 12 cm et 3 cm respectivement.



En partant du point M et en allant à N, en un coup de ciseaux, Antoine a partagé ce rectangle en 2 morceaux.

Avec un second coup de ciseaux, il a obtenu en tout trois morceaux avec lesquels il a reconstitué un autre rectangle dont un côté mesure 12 cm.

Comment Antoine a-t-il fait ? Reproduisez son puzzle.

Expliquez comment il a procédé et pourquoi il obtient bien un rectangle.

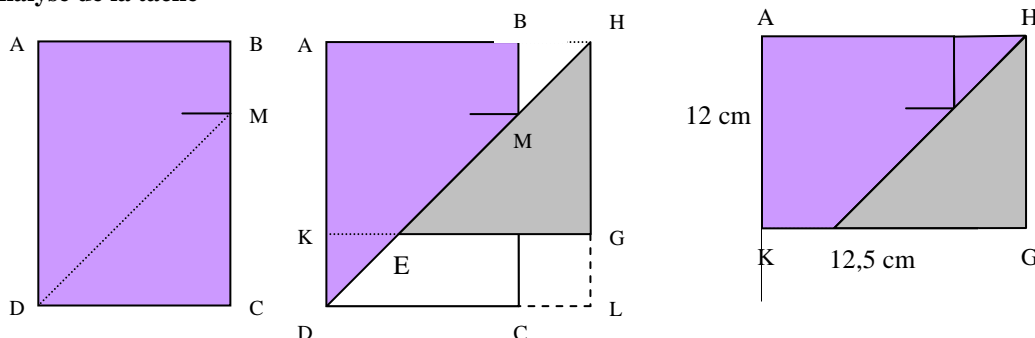
Quelle est la mesure du périmètre de son nouveau rectangle ?

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : aire du rectangle, comparaison d'aires par découpage et recombinaison, égalités de triangles.

Analyse de la tâche



- Après avoir coupé le rectangle ABCD suivant le segment [MD], faire glisser le triangle DCM le long de la coupe (MD) jusqu'à toucher la droite (AB) en H. Il ne reste plus qu'à découper la pointe du trapèze ABMC suivant [KE] et à placer en MBH le triangle DKE.
- Ces deux triangles sont égaux : on le justifie par la même translation que celle de la construction d'origine, qui amène le triangle DCM en EGH. On peut aussi le démontrer ou le justifier en montrant que DKE et MBH sont deux triangles rectangles dont les angles sont respectivement égaux (car la seconde découpe de K à E est parallèle à AB), et leurs hypoténuses sont égales ($DE = MH$ par translation).
- Le nouveau rectangle AHGK est de même aire $15 \times 10 = 150 \text{ cm}^2$ que le rectangle ABCD. Il a une largeur de 12 cm et donc pour longueur $150/12 = 12,5 \text{ cm}$, et son périmètre mesure 49 cm.

Ou : après avoir trouvé que le nouveau rectangle a comme dimensions 12 cm x 12,5 cm, le dessiner et y placer le triangle MCD (obtenu par le premier coup de ciseaux) et chercher comment couper le trapèze rectangle pour recouvrir la surface avec trois pièces.

Niveau : 8

Origine : Franche-Comté