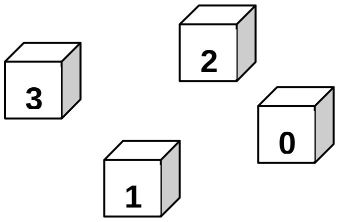
No	titre	3	4	5	6	7	8	Ar.	Alg.	Ge.	Lo.	Orig.
1	Jeu de cubes	3						x			x	SI
2	Les cinq carrés	3	4					x		xx		SI-CI
3.	À deux sur une balance	3	4					xx			x	PU-CI
4	Ruban de nombres	3	4	5				x				CI
5	Le foulard	3	4	5						x		SI
6	Des nombres avec des « 2 »		4	5	6			x			x	CI-SI
7	Biscuits		4	5	6			x		x		CI-GE
8	Petits gourmands			5	6			x			x	SI
9	Au théâtre			5	6	7		x				SI
10	Le nombre de Charles			5	6	7		x	x			SI
11	Puzzle I				6	7	8			x	x	CI-FC
12	Au fitness				6	7	8	x	x			PU
13	L’octogone plié					7	8			x		FC
14	Le temps des vendanges					7	8	x	x		x	SI
15	Rubans et perles					7	8				x	SI
16	Les figures d’Andrea						8	x		x		SI
17	Les trucs de Pépé Albert						8	x	x			SI

1. JEU DE CUBES (Cat. 3)

Louis a quatre cubes de bois. Sur chacun d'eux est écrit un chiffre : 0, 1, 2 ou 3.



Louis joue souvent avec ses cubes : il s'amuse à en placer deux, trois ou quatre l'un à côté de l'autre de plusieurs façons. Il lit à chaque fois le nombre formé.

Quels sont les nombres plus grands que 300 et plus petits que 1300 que Louis peut former en jouant avec ses cubes ?

Écrivez-les et expliquez comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : notation de position (écriture et lecture de nombres)
- Logique : élaboration d'un inventaire complet

Analyse de la tâche

- Remarquer que les nombres entre 300 et 1300 ont trois ou quatre chiffres.
- Se rendre compte que parmi les nombres de trois chiffres les seuls que Louis peut former avec ses cubes ont le chiffre 3 pour les centaines et que, par conséquent, il ne reste de disponible que les cubes 2, 1 et 0.
- Procéder alors à la construction des nombres en prenant deux à deux de toutes les manières possibles ces trois cubes et noter les nombres 301, 302, 312, 310, 320, 321.
- Procéder de la même manière pour construire les nombres de quatre chiffres : le 1 étant consacré aux milliers, se rendre compte que pour les centaines on ne peut utiliser que le 0 et le 2, et noter ainsi 1023, 1032, 1203, 1230.

Niveaux : 3

Origine : Siena

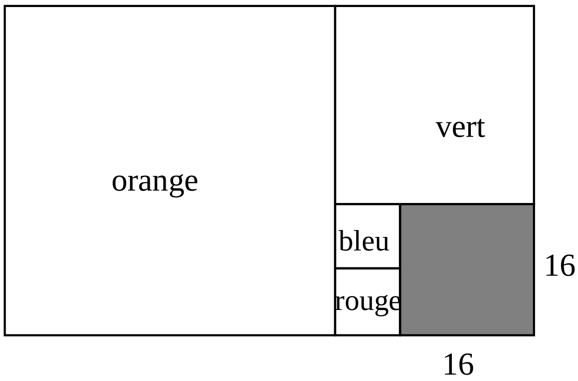
2. LES CINQ CARRÉS (Cat. 3, 4)

Avec cinq carrés, de différentes couleurs, Claire a rempli entièrement un grand rectangle comme le montre le dessin.

Les côtés du carré gris, en bas à droite, mesurent 16 cm.

Quelles sont la longueur et la largeur du rectangle ?

Expliquez comment vous avez trouvé ces deux réponses.



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

-Arithmétique : opérations

- Géométrie : carré, rectangle, comparaison et somme de segments

Analyse de la tâche

- Observer le dessin et les cinq carrés, vérifier les alignements.
- Constater que les deux petits carrés sont égaux, que leurs deux côtés alignés correspondent au côté du carré gris et que par conséquent, ils ont chacun 8 cm de côté (16 : 2).
- Voir ensuite qu'un côté du carré vert est la somme des côtés des carré gris et bleu, c'est-à-dire 24 (16 + 8) et, vu que la figure est un carré, que tous ses côtés mesurent 24 cm.
- Voir finalement qu'un côté du carré orange est la somme des côtés des carré vert, bleu et rouge, c'est-à-dire 40 (24 + 8 + 8) et, vu que la figure est un carré, que tous ses côtés mesurent 40 cm.
- En déduire, par additions de mesures, la longueur du rectangle : 64 = 40 + 24 et la largeur : 40 = 24 + 16 ou la largeur du carré orange

Ou procéder par dessin des carrés, sur quadrillage (avec une réduction car les dimensions réelles sont trop grandes pour que le dessin tienne sur une feuille) en commençant par le carré gris et les deux petits, puis le vert, puis l'orange.

Niveaux : 3, 4

Origine : Siena, C.I.

3. À DEUX SUR UNE BALANCE (Cat. 3, 4)

Anne et Julie se tiennent ensemble sur une balance. La balance indique 50 kg.

Anne descend et, à sa place, Charles monte à côté de Julie. La balance indique 58 kg.

Julie descend et Anne revient, à côté de Charles. La balance indique 52 kg.

Mettez dans l'ordre les trois enfants, du plus léger au plus lourd.

Pouvez-vous aussi dire combien pèse Anne ? Et combien pèse Julie ? Et combien pèse Charles ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition et soustraction, relation d'ordre
- Logique : organisation d'une recherche

Analyse de la tâche

- Comprendre que la balance indique la somme des deux poids des enfants qui y sont montés.
- D'après les deux première informations, comprendre que, au changement entre Anne et Charles, correspond une augmentation du poids, de 50 à 58 kg, ce qui signifie que Charles est plus lourd que Anne, de 8 kg. D'après les deuxième et troisième informations, comprendre que, lorsque Anne remplace Julie, le poids diminue de 58 à 52 kg, ce qui signifie que Anne est plus légère que Julie, de 6 kg. (Avec un même raisonnement, entre la première et la troisième information, on trouve que Charles est plus lourd que Julie, de 2 kg.)
- Arriver ainsi à la sériation des poids : Anne < Julie < Charles

  ou, avec des valeurs numériques : $A < J = A + 6 < C = A + 8 = J + 2$.
- À partir de la sériation numérique, sachant que Charles pèse 8 kg de plus qu'Anne, se rendre compte que, lorsqu'ils sont ensemble sur la balance et arrivent à 52 kg, cette dernière somme représente deux fois le poids d'Anne augmenté de 8 kg. En retirant les 8 kg, déduire que deux fois le poids d'Anne est 44 kg et qu'Anne pèse 22 kg.
- Sans tenir compte de la sériation précédente, effectuer des essais et les organiser. Par exemple, en partant de 24 et 26 pour les poids d'Anne et Julie, dont la somme est 50, calculer le poids de Charles par soustraction à partir de C + J = 58, puis vérifier la somme des poids d'Anne et Charles :

poids de :	Anne	Julie	Charles	A + C	
1e essai	24	26	32	56	différent de 52, (écart de 4) ne convient pas
2e essai	23	27	31	54	différent de 52, (écart de 2) diminue mais ne convient pas
3e essai	22	28	30	52	égal à 52, (écart de 0) convient
4e essai	21	29	29	50	différent de 52, (écart de 2) ne convient pas

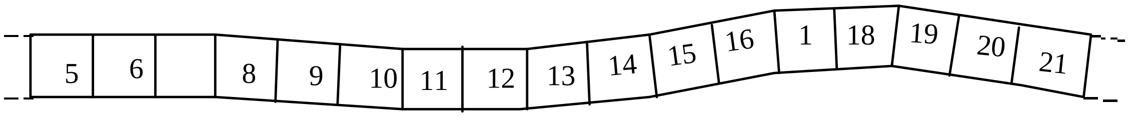
…

Niveaux : 3, 4

Origine : Puglia, C.I

4. RUBAN DE NOMBRES (Cat. 3, 4, 5)

Carla a écrit les nombres de 1 à 120 sur les cases d'une bande.
Son petit frère a trouvé très amusant d'effacer tous les chiffres « 7 ».
Voici une partie de la bande avec les « 7 » effacés » :



Sur la bande de 1 à 120 où les « 7 » ont été effacés,

- **combien y a-t-il de cases vides ?**
- **combien y a-t-il de cases avec un nombre d'un seul chiffre ?**

Expliquez comment vous avez trouvé vos deux réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : numération, connaissance des régularités du système de numération décimal

Analyse de la tâche

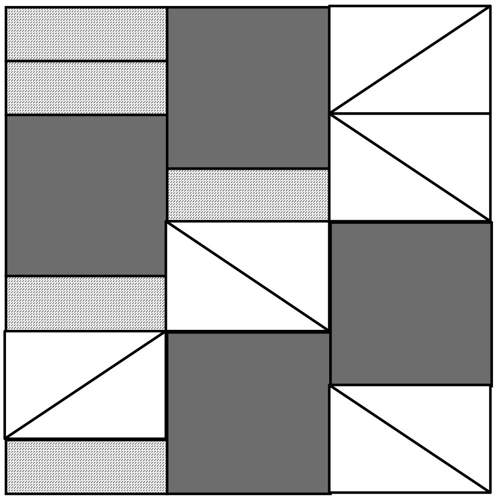
- Imaginer la bande complète des nombres de 1 à 120 et ce qu'elle devient lorsqu'on efface les chiffres « 7 », ou la construire en écrivant tout ou partie des nombres.
- Prendre conscience des régularités de la position des chiffres « 7 » : un par dizaine pour les chiffres des unités, dix dans la dizaine de 70 à 79 pour les chiffres des dizaines, cas particulier du 77 dont les deux chiffres seront effacés, …
- Compter, avec un contrôle rigoureux, les nombres restants sur la bande construite, ou mentalement en se représentant les deux catégories, de manière explicite :

  2 cases sont vides : « 7 » et « 77 »,

  25 cases (3 x 8 + 1) contiennent des nombres d'un seul chiffre : 3 pour chacun des huit chiffres restants de « 1 » à « 9 » (par exemple, pour le « 2 », issues des cases 2, 27 et 72) et 1 case avec « 0 » issus de 70
- Donner les deux réponses (2 et 25) avec les nombres de chiffres correspondants

Niveaux : 3, 4, 5
Origine : C.I.

5. LE FOULARD (Cat. 3, 4, 5)



Un couturier est en train de créer un nouveau modèle de foulard carré à partir de trois figures géométriques de base : des carrés, des rectangles et des triangles.

Voici le modèle qu'il a créé dans lequel apparaissent quatre carrés égaux, cinq rectangles égaux et dix triangles égaux.

Maintenant, il aimerait créer d'autres modèles de foulards carrés de même taille en n'utilisant qu'une seule des trois figures de base.

Selon vous, le styliste pourra-t-il n'utiliser que des carrés ? Si oui, combien ?

Ou seulement des rectangles ? Si oui, combien ?

Ou seulement des triangles ? Si oui, combien ?

Donnez vos réponses et expliquez comment vous les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : pavage d'un carré par des triangles, rectangles ou carrés, recherche de rapports entre côtés et aires des pièces
- Mesure d'aires selon différentes unités

Analyse de la tâche

- Observer le dessin et confronter les bandes qui divisent le grand carré, de même aire mais constituées de figures différentes, en formes et nombres.
- Déduire, par confrontation des bandes deux à deux :

  un carré est équivalent à trois rectangles (confrontation entre la bande de gauche et la bande centrale)

  un triangle rectangle est équivalent à un rectangle (puisque quatre rectangles et quatre triangles sont équivalents, comme on l'observe en comparant la bande de gauche et la bande de droite)
- Déduire du dessin et des considérations sur les équivalences entre figures que le foulard peut être recouvert en utilisant seulement des carrés (il en faut 9) ou seulement des rectangles (il en faut 27).

  Puisque les triangles sont équivalents aux rectangles, on pourrait penser que le foulard peut être recouvert aussi par 27 triangles. Mais il n'est pas possible d'utiliser seulement ces triangles : ils devraient en effet être unis deux à deux par leurs hypoténuses pour former des rectangles « doubles » (équivalant à deux petits rectangles) ; pour le pavage et on ne pourrait en placer que 13 au maximum (correspondant à 26 petits rectangles). Il resterait alors une partie vide du foulard (équivalente à un rectangle).

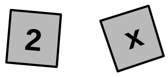
Ou : procéder de manière empirique, par exemple par découpage précis des pièces et par pavage ou, par mesurage des côtés pour déterminer les rapports entre les côtés.

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Siena

6. DES NOMBRES AVEC DES « 2 » (Cat. 4, 5, 6)

Anne, Béatrice, Daniel et Élise ont trouvé des cartes carrées sur lesquelles sont écrits « 2 » ou « x »



Avec ces cartes, chacun des enfants a obtenu un nombre, différent de celui des autres et plus petit que 100.

Anne a obtenu 8 de cette façon, avec cinq cartes :

2	x	2	x	2

Avec seulement quatre cartes, Béatrice a obtenu 44 ainsi :

2	2	x	2

Daniel a obtenu un nombre qui vaut 24 de plus que le nombre obtenu par Élise.

Quels sont les nombres obtenus par Daniel et par Élise ?

Montrez comment Daniel et Élise ont disposé leurs cartes pour obtenir leur nombre et expliquez comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

Arithmétique : multiplication, produits de facteurs égaux (approche des puissances)

Logique : organisation d'une recherche

Analyse de la tâche

- Comprendre les modalités de formation des nombres et procéder par essais et ajustements.
- Se rendre compte que 16 peut être écrit comme produit répété de facteurs « 2 » (par itération du processus de construction du 8) et qu'on peut poursuivre ainsi en utilisant 9 cartes (pour 32) ou 11 cartes (pour 64) sans aller au-delà car on dépasserait 100.
- Partir de la dernière condition et exclure la possibilité qu'Élise ait utilisé 8 cartes (avec « 22 x 2 x 2 x 2 » car elle serait arrivée à 176 > 100)
- Essayer avec 9 cartes, mais constater que 32 + 24 = 56 ne peut pas être obtenu par Daniel avec les règles données.
- Essayer enfin avec 11 cartes et vérifier que 64 + 24 = 88 est possible avec « 22 x 2 x 2 »

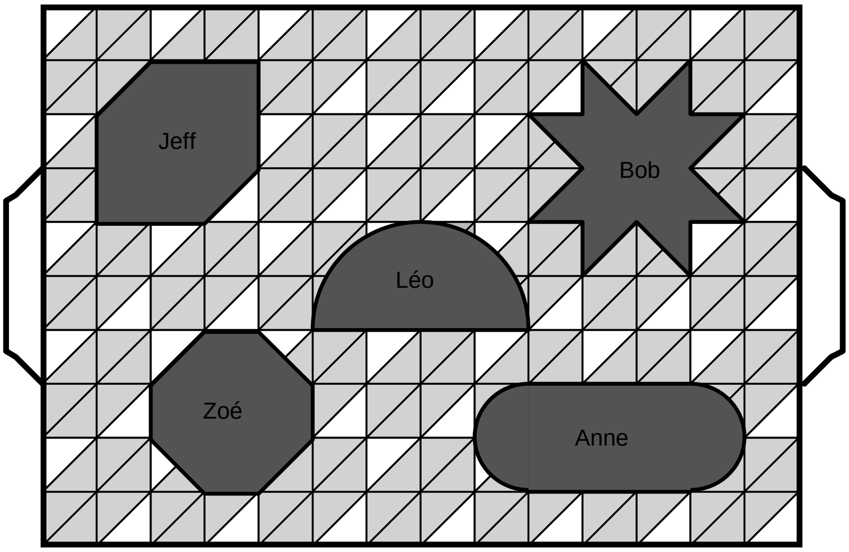
Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Siena

7. BISCUITS (Cat. 4, 5, 6)

Voici les biscuits que le pâtissier a préparés pour cinq enfants et qu'il a placés très précisément sur un plateau.

Les biscuits sont tous de même épaisseur, mais certains enfants sont mécontents et disent que leur biscuit est plus petit que celui des autres.



Pensez-vous que tous les enfants auront la même quantité de biscuit à manger ?

Sinon, mettez les biscuits dans l'ordre, du plus petit au plus grand.

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : comparaisons d'aires, choix d'unités et décomposition, approximations
- Arithmétique : comptage et addition

Analyse de la tâche

- Déterminer la grandeur en jeu pour trouver la part de biscuit de chacun : écarter les angles (forme), le nombre de côtés ou sommets et le périmètre ; opter pour l'aire des figures (ou le volume vu que les biscuits ont tous la même épaisseur)
- Trouver un moyen de comparer les aires : constater que les tentatives de superposition ou de découpage et reconstitutions ne donnent pas de résultats probants ; penser à utiliser la trame du plateau pour « paver » les formes (en carrés, triangles, …)
- Imaginer ou dessiner la trame du plateau sur les figures, choisir une unité et procéder au comptage pour les figures « pavables » (En carrés on obtient 8 pour Jeff et Bob, 7 pour Zoé)
- Pour les figures non « pavables », constater que dans la figure d'Anne il y a 6 carrés entiers et 4 quarts de disques (quatre demi-carrés et quatre petites parties de disques), ce qui équivaut à une mesure de plus de 8 carrés. La figure de Léo est inscrite dans un rectangle de 8 carrés, en retirant 2 demi-carrés et d'autres parties de carrés, on arrive à une mesure inférieure à 7 carrés.
- Établir le classement. Par exemple, en exprimant les aires en carrés : Léo (< 7), Zoé (7), Jeff et Bob (8), Anne (>8).

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : C.I. et Genova

8. PETITS GOURMANDS (Cat. 5, 6)

Anne, Daniel et Alice se sont partagé un paquet de bonbons de manière à en avoir tous le même nombre.

Un peu plus tard, chacun en a déjà mangé 14.

À ce moment, ils se rendent compte que s'ils mettent ensemble tous les bonbons qui leur restent, le total est égal au nombre de bonbons que chaque enfant avait reçus au moment du partage.

Combien le paquet contenait-il de bonbons ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication
- Logique : organisation d'une recherche

Analyse de la tâche

- Comprendre que chaque enfant a reçu obligatoirement plus de 14 bonbons.
- Procéder par essais en supposant que, lors du partage, chacun ait reçu un certain nombre de bonbons (plus de 14), par exemple : 18 (14+4). Mais, dans ce cas, le nombre total des bonbons restants serait 12 (4 x 3) et ne conviendrait donc pas. Faire d'autres essais jusqu'à découvrir que 21 (14+7), le nombre total des bonbons qui restent (7 x 3) est justement égal au nombre des bonbons reçus par chacun au moment du partage.

  Utiliser éventuellement un dessin ou un tableau qui tient compte des essais effectués.

Ou : se rendre compte que la part initiale de chaque enfant peut être vue soit comme somme des trois « restes » égaux soit comme somme d'un de ces « restes » et de 14 ; comprendre alors que deux « restes » correspondent à 14 bonbons, et que la part initiale de chaque enfant est de 21 (14 + 7) bonbons.

- Multiplier 21 par 3 et obtenir 63, nombre de bonbons contenus dans le paquet.

Ou : partir du nombre initial de bonbons : ce nombre total de bonbons est un multiple de 3, il est supérieur à 42. Établir la liste des multiples de 3 qui suivent 42 : 45 ; 48 ; 51 ; 54 ; 57 ; 60 ; 63….. ; calculer la différence entre ces différents multiples et 42 ; prendre le triple et vérifier qu'il correspond au nombre initial.

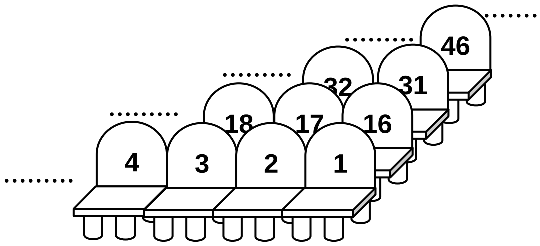
(Exemple : (48 - 42) x 3 = 18 ≠48 ; (63 – 42) x 3 = 63)

Niveaux : 5, 6

Origine : Siena

9. AU THÉÂTRE (Cat. 5, 6, 7)

Dans le théâtre de ma ville, les fauteuils sont disposés en rangs tous égaux et sont numérotés de telle manière que le numéro le plus petit de chaque rang soit sur le premier fauteuil du rang, à droite (comme sur cette figure).



Anne a acheté un billet pour le prochain spectacle et aura la place 104. Son amie Danièle a décidé d'aller aussi à ce spectacle et souhaite être le plus près possible d'Anne.

À la billetterie, on lui dit qu'elle peut choisir entre la place 107 et la place 88 qui sont encore libres toutes les deux.

Quelle place doit-elle choisir ?

Justifiez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : division avec reste

Analyse de la tâche

- Observer sur le dessin comment sont numérotés les fauteuils et comprendre que chaque rang est formé de 15 fauteuils.
- Se rendre compte que le dernier fauteuil de la file est numéroté par un multiple de 15.
- Comprendre que, pour déterminer la position du fauteuil 104, il faut effectuer la division entière de 104 par15 ; ce qui donne un quotient entier de 6 (numéro du rang complet précédant celui sur lequel se trouve la place 104 ; il y a donc 6 rangs complets devant celui qui contient la place 104) avec un reste de 14 (position de la place 104 dans le 7e rang, c'est-à-dire l'avant dernier fauteuil du rang).
- Se rendre compte, en continuant à compter ou par une nouvelle division par 15, que 107 est le deuxième fauteuil du 8e rang
- Par un raisonnement analogue se rendre compte que 88 est dans la 6e file, le 3e depuis la fin (88 : 15 donne un quotient de 5 et un reste de 13)
- En déduire que Danièle devra prendre la place n. 88 et se trouvera ainsi presque devant son amie.

Ou : construire un schéma plus ou moins complet représentant la disposition et la numérotation des places et déterminer celles qui sont concernées. Par exemple :

														...
													107	106
	104													91
		88												76
														61
														46
														31
														16
15	14	13	...								...	3	2	1

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Siena

10. LE NOMBRE DE CHARLES (Cat. 5, 6, 7)

Annie est professeur de mathématiques. Pour entraîner ses élèves à calculer, elle a distribué à chacun un billet sur lequel est inscrit un nombre entier naturel et a donné, à la suite les unes des autres, les instructions suivantes :

- ajoutez 20 au nombre inscrit sur votre billet,
- divisez cette somme par 3,
- soustrayez 2 au résultat précédent,
- multipliez ce que vous avez obtenu par 4
- et finalement soustrayez 10 et notez votre résultat.

Charles a effectué correctement tous les calculs et a obtenu comme résultat final le double du nombre qu'il avait reçu.

Selon vous, quel était le nombre inscrit sur le billet de Charles ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : les quatre opérations
- Algèbre : approche des équations

Analyse de la tâche

- Organiser des essais en tenant compte que le que le nombre cherché est tel que, augmenté de 20, il devient un multiple de 3 et qu'il appartient donc à la suite 1, 4, 7, 10, 13, 16,...

  Essayer par exemple avec n = 1. On obtient

  1 + 20 = 21 ; 21 : 3 = 7 ; 7 – 2 = 5 ; 5 × 4 = 20 ; 20 – 10 = 10. Ne convient pas

  Avec n = 4. 4 + 20 = 24 ; 24 : 3 = 8 ; 8 – 2 = 6 ; 6 × 4 = 24 ; 24 – 10 = 14. Ne convient pas, mais on s'approche

  Continuer ainsi et trouver, pour n = 13 : [(13+20) : 3 – 2] × 4 – 10 = 26 et déduire que 13 est le nombre cherché.

  Vérifier que les nombres suivants ne conviennent pas car les résultats suivants s'éloignent toujours plus et conclure que n = 13 est la seule possibilité.

Ou : organiser les recherches en un tableau :

nombre de départ :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**13**	14	15	16	…
ajouter 20 :	0	1	22	23	24	…	…	27	…	…	30	…	…	33	…	…	36	…
diviser par 3 :	0	3	7,33…	23/3	8	…	…	9	…	…	10	…	…	11	…	…	12	…
soustraire 2 :	0	1	5,33…	17/3	6	…	…	7	…	…	8	…	…	9	…	…	10	…
multiplier par 4 :	0	4	21,33…	68/3	24	…	…	28	…	…	32	…	…	36	…	…	40	…
soustraire 10 :			11,33…	38/3	14	…	…	18	…	…	22	…	…	**26**	…	…	30	…
double du nb. départ :			4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	**26**	28	30	32	

Ce tableau permet de voir les nombres qui ne sont plus entiers après la division par 3 et ne le redeviennent pas car il n'y a pas de multiplication par un multiple de 3, ce qui permet de se limiter à la suite 1, 4, 7, … des multiples de 3 augmentés de 1. Il permet aussi de constater que chacune des suites (lignes) est régulière croissante (idée de fonction définie sur les nombres naturels) et de se convaincre de l'unicité de la solution. Avec une colonne supplémentaire pour le terme général « n », on introduirait les expressions fonctionnelles des fonctions $n + 20$, $(n + 20) : 3$, … et finalement l'équation $2n = ([(n + 20) : 3] – 2) \times 4 – 10$.

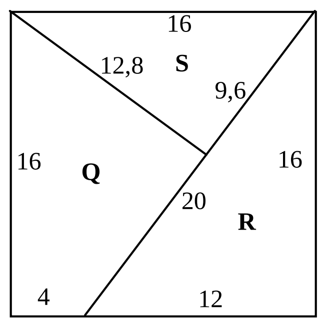
Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Siena

11. PUZZLE I (Cat. 6, 7, 8)

On a découpé un carré de 16 cm de côté en trois pièces, comme le montre cette figure :

- un premier triangle rectangle R dont les côtés mesurent 20 cm, 16 cm et 12 cm ;
- un second triangle rectangle S dont les côtés mesurent 16 cm, 12,8 cm et 9,6 cm ;
- un quadrilatère Q avec deux angles droits.



Le quadrilatère Q étant fixe, avec les deux triangles R et S qui peuvent être retournés, combien pouvez-vous former de polygones convexes différents (c'est-à-dire dont les angles sont tous inférieurs à un angle plat et qui ne sont pas superposables) ?

Dessinez ces polygones et calculez leurs périmètres.

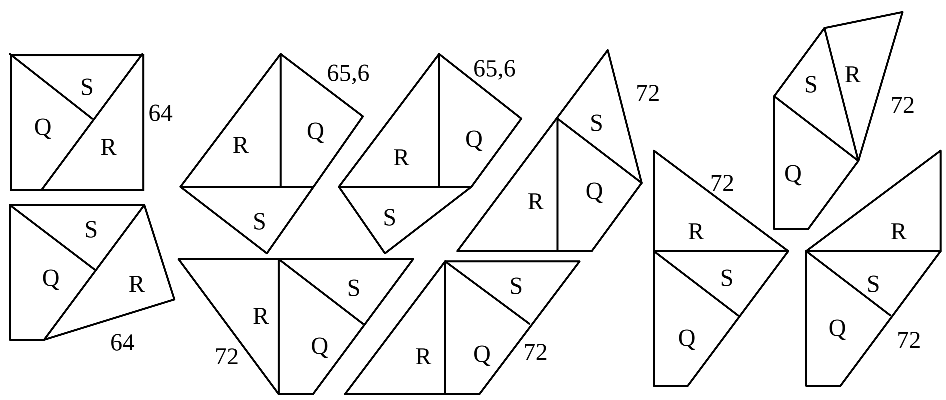
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : triangles et quadrilatères, comparaisons de figures, angles et périmètre
- Logique : assemblages systématiques des trois pièces dans leurs positions relatives

Analyse de la tâche

- Former des figures avec les trois pièces, par découpage ou par dessin et s'approprier les conditions « polygone convexe » : pas d'angles rentrants, figures différentes et coïncidences des côtés communs.
- Se rendre compte que les côtés pouvant être communs sont en nombre limité, de longueurs 16 ou 12,8. Notamment, l'ajustement d'un côté de 12 cm avec un côté de 12,8 cm ne convient pas.
- Dresser un inventaire complet des polygones possibles, en combinant par exemple une ' figure de base » constituée du quadrilatère Q et d'un triangle avec les différentes façons de placer l'autre triangle.
- Calculer les périmètres des figures.



Niveaux : 6, 7, 8

Origine : C.I. et Franche-Comté, sur une idée d'un article de M. Polo et al., Cagliari

12. AU FITNESS (Cat. 6, 7, 8)

Angéla et Rosanna fréquentent la même salle de culture physique mais avec des modalités de paiement différentes.

Angéla paie une somme fixe de 12 euros par mois puis 2,50 euros pour chaque séance où elle est présente.

Rosanna préfère payer 3 euros par présence effective.

Les deux amies qui fréquentent la salle de culture physique avec assiduité ont déterminé le nombre de présences pour lequel le mode de paiement est tout à fait indifférent.

Combien de fois par mois les deux amies doivent-elles aller en salle de culture physique pour être certaines de payer la même somme ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : les quatre opérations
- Algèbre : équations

Analyse de la tâche

- Procéder par essais, par exemple en supposant, pour commencer, que Rosanna et Angéla fréquentent la salle seulement deux fois par semaine, c'est-à-dire 8 fois par mois. Les frais mensuels de Rosanna sont alors de 24 euros (8 x 3), et ceux d'Angéla de 32 euros (12 + 2,50 x 8), avec une différence de 8 euros. En trois fois par semaine ou 12 fois par mois Angéla dépense 42 euros (12 + 2,50 x 12) et Rosanna 36 euros (3 x 12) avec une différence de 42 - 36 = 6 euros.
- Émettre ainsi l'hypothèse que la différence diminue avec l'augmentation de la fréquentation et essayer alors avec 4 fois par semaine (16 fois par mois) et vérifier qu'on a encore une différence de 4 euros. Finalement, en essayant avec 6 fois par semaine ou 24 fois par mois les deux amies payent la même somme (72 euro).

Ou : établir un tableau donnant les coûts en fonction du nombre d'entrées, du genre :

N (entrées)	1	2	3	4	…	20	21	22	23	**24**	25	26
dépense de A(en €)	14,5	17	19,5	22		62	64,5	67	69,5	**72**	74,5	77
dépense de R(en €)	3	6	9	12		60	63	66	69	**72**	75	78

Ou : construire une représentation graphique et constater que les données précédentes se trouvent sur deux droites qui se coupent en (24 ; 72)

Ou : se rendre compte que pour chaque présence, Rosanna paye 0,50 euro de plus qu'Angéla, mais que celle-ci a déjà payé 12 euros initialement. Donc les deux amies paieront la même somme quand le nombre de séances fois 0,50 euro de différence fera 12 euros, c'est-à-dire après 24 présences (12 : 0,50).

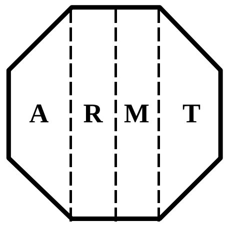
Ou : désigner par x le nombre de présences selon lequel la dépense est la même et poser une équation du premier degré :$12 + 2{,}5x = 3x$. Déterminer ainsi la valeur $x = 24$, correspondant à 24 présences.

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Puglia

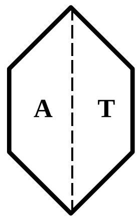
13. L'OCTOGONE PLIÉ (Cat. 7, 8)

La prochaine leçon de géométrie porte sur les propriétés de l'octogone régulier (dont tous les côtés et les angles sont égaux). Chaque élève doit apporter un octogone régulier découpé dans un carton.



Octave a réalisé une belle maquette sur laquelle il a écrit les 4 lettres A, R, M, T :

En son absence, sa petite sœur coquine, Hélène, a plié l'octogone selon les pointillés, avec le M sur le R.



On ne voit plus qu'un hexagone :

Comparez son aire à celle de l'octogone d'Octave et dites quelle relation il y a entre elles.

Justifiez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

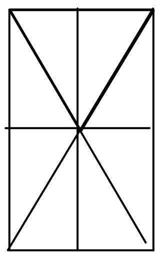
- Géométrie : polygones, comparaison d'aires par découpages et recompositions.

Analyse de la tâche

- Voir que l'aire de l'hexagone d'Hélène est la moitié de celle de l'octogone d'Octave.

  Deux justifications possibles, entre autres, évaluant l'aire du rectangle disparu :

  Raisonnement 1 : Voir que l'octogone régulier est constitué de 8 triangles isocèles égaux (triangles de base), ayant leurs sommets au centre. Puis découper ainsi le rectangle RM en triangles rectangles :



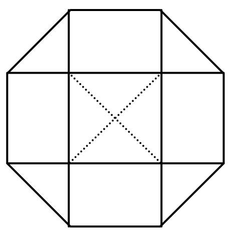
Tous les triangles rectangles sont égaux (superposables, isométriques, …).

Il y en a 16 formant l'octogone puisque deux d'entre eux reconstituent un triangle isocèle de base. (en gras sur le dessin)

8 d'entre eux forment le rectangle disparu dont l'aire est donc la moitié de l'aire de l'octogone.

L'hexagone d'Hélène est le complémentaire dans l'octogone d'Octave du rectangle disparu. Son aire est donc la moitié de celle de l'octogone.

Raisonnement 2 : Découper l'octogone par les diagonales verticales et horizontales.



Elles forment une croix dont le carré central a des côtés de même longueur que les côtés de l'octogone. Les 4 triangles rectangles isocèles qui complètent la croix ont pour hypoténuses des côtés de l'octogone. Ils peuvent donc recouvrir exactement le carré central, selon les pointillés.

Les branches de la croix sont formées de 4 rectangles égaux (invariance de la figure par rotations de 90°).

Le rectangle disparu RM est formé de deux tels rectangles et de 4 triangles, de même que l'hexagone d'Hélène. Ils ont donc même aire, l'aire de l'hexagone est donc la moitié de celle de l'octogone.

Ou, par un calcul algébrique : tracer la hauteur du trapèze A (de mesure h) et observer que le côté d'un carré, dont la diagonale est le côté de l'octogone, mesure $h\sqrt{2}$; la grande base du trapèze mesure $2h+ h\sqrt{2}$, la petite base mesure $h\sqrt{2}$ et l'aire de l'hexagone est $2h^2(1+ \sqrt{2})$. Calculer ensuite l'aire du rectangle RM: $h\sqrt{2}\ (2h+ h\sqrt{2}) = 2h^2(1+ \sqrt{2})$. Les deux aires sont égales.

Niveaux : 7, 8

Origine : Franche-Comté

14. LE TEMPS DES VENDANGES (Cat. 7, 8)

Dans les vignes de M. Brunello, un jour de vendanges, avec le raisin recueilli on a rempli 18 grandes cuves et 13 cuves moyennes. Pour les transporter à la cave, M. Brunello dispose de trois tracteurs :

- le tracteur A peut transporter, à pleine charge, 3 grandes cuves et 2 moyennes ;
- le tracteur B peut transporter, à pleine charge, 2 grandes cuves et 1 moyenne ;
- le tracteur C peut transporter, à pleine à charge, 1 grande cuve et 1 moyenne ;

Ce jour-là, M Brunello a utilisé au moins une fois tous ses tracteurs et toujours à pleine charge.

Combien de voyages peut avoir fait M. Brunello avec chacun de ses tracteurs pour transporter toutes les cuves à la cave ?

Décrivez tous les voyages possibles et expliquez comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique : capacité de gérer plusieurs conditions et organiser des essais, formulation d'hypothèses, raisonnement déductif

  Arithmétique : les quatre opérations,
- Algèbre : équations et systèmes d'équations

Analyse de la tâche

- Procéder de manière organisée par un tableau qui tient compte des caractéristiques de chaque tracteur et du nombre des cuves transportées augmentant avec le nombre de voyages. Commencer par exemple en choisissant le nombre maximum de voyages du tracteur A et le minimum pour B et C. Se rendre compte que si B et C ne font qu'un seul voyage A devrait en faire 5, mais ainsi, on aurait transporté 18 grandes cuves et 12 moyennes, ce qui ne suffit pas.

  En supposant que A ne fasse que 4 voyages (12 ; 8) et B un seul (2 ; 1) on arriverait à 14 grandes cuves et 9 moyennes et il est facile de voir que 4 voyages de C suffiront à transporter toutes les autres cuves. On obtient ainsi une première solution : 4 voyages pour A, 1 pour B et 4 pour C.

  En supposant que A fasse 3 voyages (9 ; 6) et B un seul (2 ; 1), il n'est pas possible de terminer avec des voyages complets de C, mais si B fait 2 voyages (4 ;1), on constate que 5 voyages de C font le complément et l'on obtient une deuxième solution : 3 voyages pour A, 2 pour B et 5 pour C.

  Dans les hypothèses où A fait respectivement 2 ou 1 voyage, on trouve de la même manière les deux autres solutions : 2 voyages pour A, 3 pour B, 6 pour C et 1 voyage pour A, 4 pour B et 7 pour C.
- Ou : à partir d'une solution trouvée (par essais successifs), obtenir les autres en observant qu'un voyage de A équivaut à un de B et un de C.
- Ou : procéder par algèbre en résolvant un système d'équations comme, par exemple :

  Si x, y et z sont respectivement les nombres de voyages des tracteurs A, B et C, la situation se traduit par les deux équations : $3x + 2y + z = 18$ et $2x + y + z = 13$, dont on tire, par différence $x + y = 5$ et dont on retient les solutions en nombres entiers naturels différents de 0 : (1 ; 4), (2 ; 3), (3 ; 2) (4 ; 2). Chaque couple permet de déterminer la valeur correspondante de z (respectivement 7, 6, 5, 4). On retrouve ainsi les quatre possibilités.

Niveaux : 7, 8

Origine : Siena

15. RUBANS ET PERLES (Cat. 7, 8)

Alice fait souvent des rubans de perles. À chaque fois, elle prend un ruban, elle lui fait un nœud, enfile un certain nombre de perles et, à la fin, fait un second nœud pour empêcher les perles de sortir.

Alice vient de faire deux rubans composés chacun de perles blanches et bleues.

En observant bien son travail, Alice se rend compte que, pour chacun des deux rubans,

- elle a utilisé le même nombre total de perles ;
- elle a toujours fait précéder et suivre chaque perle blanche d'au moins deux perles bleues ;
- elle n'a jamais mis plus de trois perles bleues à la suite.

Mais Alice remarque que dans un des rubans, elle a utilisé deux perles bleues de plus que dans l'autre.

Quel est le nombre minimum de perles qu'Alice peut avoir utilisé pour chacun de ses rubans ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique : capacité de gérer plusieurs conditions et organiser des essais, formulation d'hypothèses, raisonnement déductif

Analyse de la tâche

- Comprendre les règles de construction des deux rubans de perles
- Etre conscient qu'il s'agit d'obtenir deux rubans avec un nombre total minimum de perles (le même pour chacun), l'un avec deux perles bleues de plus que l'autre.
- Comprendre que, dans un ruban, il s'agit d'enfiler des perles bleues (b) et des perles blanches (B) avec une règle minimisant l'usage des perles bleues, c'est-à-dire : bbBbbBbbBbb… et que, en revanche, pour l'autre ruban, il est nécessaire de trouver une règle qui maximalise l'usage des perles bleues bbbBbbbBbbb...
- Se rendre compte que, avec les règles précédentes, après avoir enfilé 11 perles sur chacun des deux rubans, il y aura au moins deux perles bleues aux extrémités et il y aura une perle bleue en plus sur le second. Comme les deux constructions sont périodiques (de respectivement 3 et 4 perles), deux perles blanches (B) se retrouvent simultanément toutes les 12 (ppcm de 3 et 4) perles. Les perles blanches se retrouveront ensemble après 24 perles et, donc, la première fois que les deux rubans complets auront une différence de 2 perles bleues est au moment où chacun a 23 perles. (Les règles de construction des deux rubans garantissent que 23 est le nombre cherché.)

Ou : Procéder par essais (utilisant des dessins ou des schémas) et arriver à la solution progressivement

par exemple par un comptage régulier des perles en construisant les deux rubans simultanément :

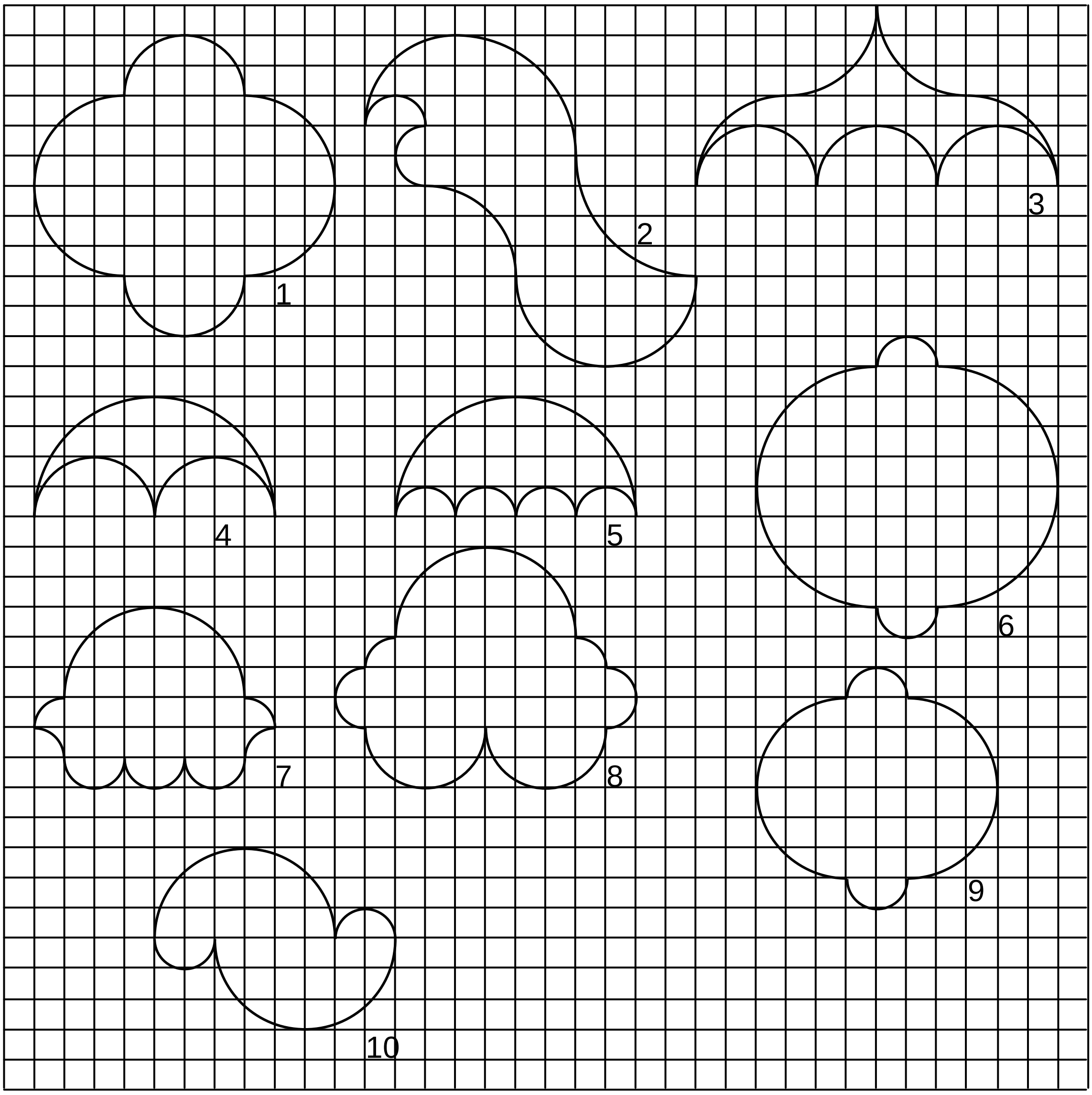
total	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**11**	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	**23**
premier ruban	b	b	B	b	b	B	b	b	B	b	**b**	B	b	b	B	b	b	B	b	b	B	b	**b**
nb. bleues	1	2	2	3	4	4	5	6	6	7	**8**	8	9	10	10	11	12	12	13	14	14	15	**15**
second ruban	b	b	b	B	b	b	b	B	b	b	**b**	B	b	b	b	B	b	b	b	B	b	b	**b**
nb. bleues	1	2	3	3	4	5	6	6	7	8	**9**	9	10	11	12	12	13	14	15	15	16	17	**18**

Niveaux : 7, 8

Origine : Siena

16. LES FIGURES D'ANDREA (Cat. 8)

Andrea a dessiné plusieurs figures en utilisant seulement des arcs de cercles :
Voici ses dessins.



En observant ses figures, Andrea se rend compte avec étonnement que certaines ont le même périmètre.

Quelles sont les figures d'Andrea qui ont le même périmètre ?

Indiquez-les clairement et justifiez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : périmètre du cercle
- Arithmétique : fractions

Analyse de la tâche

- Découvrir que toutes les figures sont composées de demi-cercles ou de quarts de cercle et déterminer leurs centres
- Choisir une unité de mesure, par exemple le côté d'un carré de la grille, et se rendre compte que les longueurs des cercles présents mesurent 2π, 4π, 6π, 8π; noter éventuellement qu'un demi-cercle de rayon 4 équivaut à quatre demi-cercles de rayon 1 ou à deux demi-cercles de rayon 2, etc.
- De l'analyse des figures, déduire que :

  les figures1, 6, 8 ont un périmètre de longueur $10\ \pi$, les figures 2 et.3 ont un périmètre de longueur $12\ \pi$

  les figures 4, 5, 7, 9 et 10 ont un périmètre de longueur $8\ \pi$

Niveaux : 8

Origine : Siena

17. LES TRUCS DE PÉPÉ ALBERT (Cat. 8)

Pépé Albert est passionné de jeux et devinettes. Dernièrement, il a proposé ce jeu à son petit-fils :

« Lance deux dés, et sans me montrer ce que tu as obtenu :

- *multiplie par 2 le nombre indiqué sur l'un des dés,*
- *ajoute 5 à ce que tu viens d'obtenir,*
- *multiplie par 5 ce dernier résultat et ajoute le nombre indiqué par l'autre dé.*

Si tu me dis combien ça fait, je pourrai te dire quelles sont les deux faces que tu avais obtenues en lançant les deux dés »

Comment Pépé fait-il pour trouver à coup sûr les nombres indiqués sur les deux dés ? Quel est son truc ?

Justifiez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : écriture décimale et valeur positionnelle des chiffres
- Algèbre : expressions algébriques

Analyse de la tâche

- Pratiquer le jeu.
- Noter d'une manière ou d'une autre les nombres sortis : par exemple, les désigner par x et y
- Comprendre les instructions et constater qu'en les traduisant par une expression algébrique, on obtient : $5(2x + 5) + y$ qui devient $10x + y + 25$ après avoir effectué la multiplication.
- Comprendre que, x ayant été multiplié par 10, les deux nombres tirés x et y (d'un seul chiffre et par conséquent inférieurs à 10) peuvent être envisagés comme les constituants d'un nombre de deux chiffres « xy », où x est le chiffre des dizaines et y celui des unités
- Comprendre que le résultat de l'expression $10x + y + 25$ est aussi le résultat de « $x\ y$ » + 25
- En déduire que le grand-père n'aura qu'à soustraire 25 au nombre transmis par ses petits-enfants pour obtenir un nombre de deux chiffres qui révèlent le tirage des dés.

Ou, de manière rhétorique : considérer que multiplier par 5 « le double du premier nombre augmenté de 5 » est équivalent à « 10 fois le premier nombre augmenté de 25 » et le résultat donné par le petit-fils sera donc égal à « 10 fois le premier nombre augmenté de 25 augmenté du second nombre ». Pépé n'aura plus qu'à enlever 25 pour arriver à « 10 fois le premier nombre augmenté du second nombre ». Même conclusion que précédemment

Niveaux : 8

Origine : Siena