No	titre	3	4	5	6	7	8	Ar.	Alg.	Gé.	Lo.	Co.	Orig.
1	Spectacle de fin d'année	3						X					PR
2	Quel âge as-tu ?	3	4					X					BB
3	Plis et replis	3	4	5				X		X			AO
4	Les pots	3	4	5				X				X	BB+CI
5	En file	3	4	5							X		PR+CI
6	Le géant Gargantua		4	5				XX					LU
7	Un triangle qui grandit		4	5	6			X		X			SR+rBB
8	Les trois coffres			5	6			X			X		SR+rBB
9	Les camarades de Judith			5	6			XX					PR
10	Kaléidoscope I				6	7				XX			AO
11	Le trésor dans le coffre-fort				6	7	8	XX			X	X	LU
12	Dés				6	7	8			XX			SI
13	Les oncles de Pierre				6	7	8	X		X		X	SI
14	Aventure sur la rivière					7	8	X					SI
15	Châteaux de cartes					7	8	X	X		X		SI
16	Numéros gagnants					7	8	X			X		SI
17	Kaléidoscope II						8			XX			AO

1. SPECTACLE DE FIN D'ANNÉE (Cat. 3)

Dans la classe de Luc, il y a 21 élèves, qui ont tous un prénom différent.

Pour le spectacle de fin d'année, les élèves qui savent jouer d'un instrument de musique ou qui savent danser préparent le ballet.

Les autres élèves de la classe, qui ne savent ni jouer d'un instrument ni danser, préparent une pièce de théâtre.

- Les élèves qui savent jouer d'un instrument de musique sont : Jean, Laure, Luisa, Luc, Marc, Robert, Sara, Valentine.
- Les élèves qui savent danser sont : Claire, Julie, Laure, Marta, Robert, Sara, Valentine.

Combien d'élèves préparent le ballet ?

Combien d'élèves préparent la pièce de théâtre ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

Arithmétique : addition et soustraction

Analyse de la tâche

- Lire l'énoncé, comprendre la répartition des élèves et en particulier que le nombre de ceux qui savent danser est différent de ceux qui préparent le ballet.
- Établir une liste des enfants qui savent jouer d'un instrument ou qui savent danser, en n'écrivant qu'une seule fois chacun, (ou simplement compter les prénoms différents de l'énoncé) pour trouver qu'il y a 11 enfants qui préparent le ballet et que les 10 autres (21 – 11) préparent la pièce de théâtre.

Ou : compter les 8 enfants qui jouent d'un instrument de musique, les 7 qui dansent et les 4 enfants (Laure, Robert, Sara et Valentine) qui savent à la fois jouer d'un instrument et danser (dans la consigne, il est spécifié que tous les enfants ont des prénoms différents) et déduire ainsi que le nombre des enfants qui seront engagés dans le ballet est 11 (7 + 8 – 4) et conclure que le nombre d'enfants qui seront engagés dans la pièce de théâtre est 10 (21 - 11).

Ou : s'aider d'un diagramme (« patates ») ou d'un tableau pour visualiser les enfants qui jouent d'un instrument, ceux qui dansent, ceux qui jouent et dansent à la fois, et les autres (pour les classes qui ont une tradition ensembliste).

Niveau : 3

Origine : Parma

2. QUEL ÂGE AS-TU ? (Cat. 3, 4)

Lisa, Julie et Tom sont trois frères et sœurs. Antoine aimerait connaître leurs âges.

Tom lui donne les informations suivantes :

- J'ai 7 ans de plus que Julie.
- Lisa a 9 ans de plus que Julie.
- Si tu additionnes nos trois âges, tu obtiens l'âge de notre maman, qui a 40 ans.

Quel est l'âge de chacun des 3 enfants ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction

Analyse de la tâche

- Comprendre les 3 contraintes et situer les trois enfants par âge : Julie, Tom, Lisa.
- Choisir un nombre proche de 40 (par exemple 39) qui se divise par 3, effectuer la division et faire l'hypothèse que c'est l'âge de Julie puis vérifier (dans l'exemple 13 + 20 + 22 = 55) et adapter successivement en diminuant pas à pas.

Ou : procéder par essais, en fixant l'âge d'un des personnages et en vérifiant les contraintes à chaque nouvel essai : choisir un âge au hasard, par exemple 10 ans pour Julie. En déduire les âges des 2 autres : 17 ans et 19 ans. Calculer le total : 46 ans, remarquer que c'est trop et diminuer l'âge de Tom pour un second essai, etc.

Ou : faire un premier essai et en déduire de combien il faut modifier l'un des âges. Dans l'exemple précédent : remarquer qu'il y a 6 ans de trop. En déduire que chaque personnage a 2 ans de trop. Donc : Julie 8 ans, Tom 15 ans et Lisa 17 ans.

Ou : par une représentation de l'âge des enfants par des longueurs (dessin de lignes) admettre que la somme des âges des trois enfants sera 3 fois l'âge de Julie + 7 pour Tom et + 9 pour Lisa et retrancher 7 et 9 de 40 pour obtenir le triple de l'âge de Julie et terminer par une division par 3.

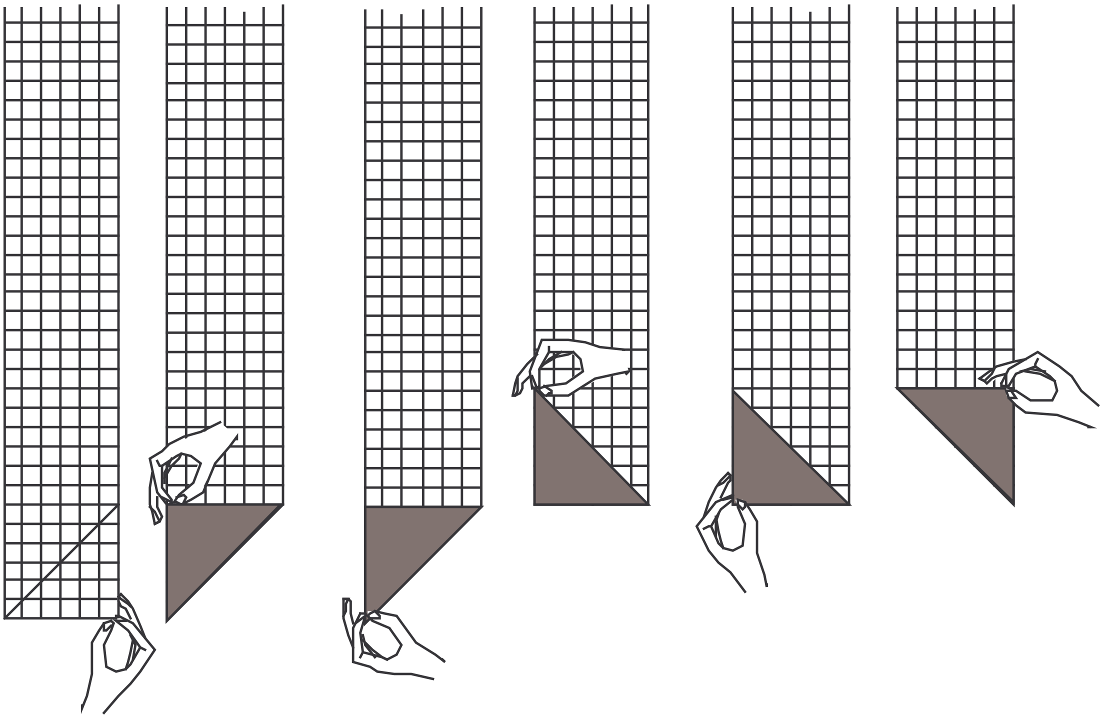
Ou : retirer de la somme des âges (40) les deux différences 7 et 9 et arriver à 24 (40 - 9 – 7 = 24) qui est le triple de l'âge de Julie.

Niveaux : 3 - 4

Origine : Bourg-en-Bresse

3. PLIS ET REPLIS (Cat. 3, 4, 5)

Andréa souhaite obtenir plusieurs triangles, tous identiques, en repliant une bande de papier quadrillé comme le montrent les dessins ci-dessous. La bande de papier a une longueur de 70 carreaux et une largeur de 6 carreaux.



Combien de triangles Andréa peut-elle obtenir en continuant à plier la bande ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

- Géométrie : triangle
- Arithmétique : multiplication ou division

Analyse de la tâche

- Comprendre, à partir du dessin, que les triangles ont deux côtés égaux.
- Reporter, sur toute la longueur de la bande (découpée réellement ou dessinée), successivement l'un et l'autre côté du triangle isocèle et compter les triangles obtenus ; voir que tous les deux pliages, se forme un carré.
- Continuer à plier des carrés, les compter et multiplier le nombre de carrés par deux pour obtenir le nombre de triangles. Constater qu'il reste une partie de bande.

Ou : comprendre que la résolution peut se faire par calcul : combien de fois 6 dans 70 ? Comprendre aussi que ce calcul aboutit à un nombre de carrés (11), et qu'un carré comprend deux triangles. Donc multiplier le nombre de carrés par deux.

- Trouver que 22 triangles sont ainsi formés par pliage.

Niveaux : 3 - 4 - 5

Origine : Val d'Aoste

4. LES POTS (Cat. 3, 4, 5)

Devant l'arrosoir, qui contient exactement 11 litres d'eau, il y a sept pots vides : de 1 litre, 2 litres, 3 litres, 4 litres, 5 litres, 6 litres et 7 litres.

Mario doit choisir quelques pots dans lesquels il versera toute l'eau de son arrosoir.
Les pots choisis devront être entièrement pleins, mais il ne faut pas qu'ils débordent !

Quels pots Mario peut-il choisir ?

Par exemple, si Mario choisit les pots 3, 4 et 6, il n'aura pas assez d'eau pour les remplir tous.
S'il choisit les pots 6 et 2, il n'arrivera pas à vider entièrement son arrosoir.
S'il choisit les pots 3, 6 et 2, c'est possible, il pourra vider l'arrosoir et remplir entièrement les pots.

Mais il y a encore d'autres possibilités.

Indiquez-les toutes et expliquez comment vous les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition (de petits nombres)
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Comprendre que les possibilités de choix comportent un nombre variable de pots.
- Passer dans le domaine numérique pour organiser la recherche qui consiste à décomposer 11 en somme de termes de 1 à 7, s'apercevoir que l'ordre des termes n'importe pas, et veiller à ne pas proposer deux fois la même somme avec les mêmes nombres.
- Trouver les possibilités en ordonnant la recherche, par exemple en écrivant systématiquement les sommes en ordonnant leurs termes :

  si le plus grand des nombres est 7, alors la somme 11 est obtenue de deux manières : 7+4 et 7+3+1 ;

  si le plus grand des nombres est 6, la somme 11 est obtenue de trois manières : 6+5, 6+4+1 et 6+3+2 ;

  si le plus grand des nombres est 5, la somme 11 est obtenue de deux manières : 5+4+2 et 5+3+2+1 ;

  si le plus grand des nombres est le 4, la somme 11 ne peut être obtenue car 4+3+2+1 = 10 est inférieure à 11 ;

  Il y a donc en tout 7 façons possibles pour Mario de remplir ses pots.

Ou : trouver les possibilités par de très nombreux essais, non organisés, en éliminant les possibilités égales.

Niveaux : 3 - 4 - 5

Origine : Bourg-en-Bresse + C.I.

5. EN FILE (Cat. 3, 4, 5)

Sept enfants marchent l'un derrière l'autre sur un sentier étroit, certains se tiennent par la main.

- II y a deux enfants entre Charles et Danielle ;
- Émile, le plus petit, donne la main à Danielle et à Françoise ;
- il y a le même nombre d'enfants derrière Bernadette que devant elle ;
- Georges est un des enfants de la file qui est devant André.

Indiquez dans quel ordre les sept enfants peuvent être placés dans la file.

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

Logique : relation d'ordre

Analyse de la tâche

- Lire l'énoncé, vérifier que les sept enfants sont cités, éventuellement en utilisant les initiales A, B, C, D, E, F et G et comprendre que B est en quatrième position, puis choisir un mode de représentation pour organiser la recherche : dessins, listes, noms notés sur des papiers pour pouvoir les déplacer, …
- Déduire de la deuxième information que D, E et F se suivent, dans cet ordre ou l'inverse et qu'ils sont les trois devant B ou derrière B, ce qui laisse quatre possibilités de placement pour ces trois enfants, ou que, de la première information, que B, en 4e position, ne peut être qu'entre C et D et qu'il n'y a également que quatre possibilités pour placer ces deux enfants.
- Combiner les deux informations pour constater qu'il ne reste que deux possibilités de placement de B, C, D, E et F :
  F ; E ; D ; B ; … ; C, …   ou   … ; C ; … ; B ; D ; E ; F.
- Utiliser la quatrième information pour placer A et G dans les deux places restantes de chacune des deux possibilités précédentes : F ; E ; D ; B ; G ; C, A ou G ; C ; A ; B ; D ; E ; F (à lire dans le sens de lecture 1e, 2e, 3e, 4e, 5e, 6e, 7e)

Ou travailler par essais successifs, avec hypothèses et vérifications.

Niveaux : 3 - 4 - 5

Origine : Parma + C.I.

6. LE GÉANT GARGANTUA (Cat. 4, 5)

Gargantua veut être admis à l'école des géants. La condition d'admission est d'avoir une barbe d'au moins 80 cm de longueur le matin.

En 24 heures, la barbe de Gargantua s'allonge de 5 cm, de manière régulière. Pour empêcher que Gargantua ne soit admis trop rapidement à l'école, sa femme lui raccourcit la barbe de 2 cm chaque nuit. Ce matin, Gargantua a une barbe de 15 cm.

Dans combien de jours Gargantua sera-t-il admis à l'école des géants ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique

Analyse de la tâche

- Reconnaître qu'il y a « superposition » d'allongements et de raccourcissements de la barbe qui peuvent se traduire par une augmentation de 3 cm d'un matin au matin suivant.
- Reconnaître que le nombre de jours cherché est le nombre de fois qu'il faut ajouter 3 à 15 pour dépasser 80.
- Calculs possibles : 80 – 15 = 65 puis 65 : 3 = 21,66 … En déduire que Gargantua doit attendre 22 jours

Ou : Noter jour par jour la longueur de la barbe :

jours (matin)	0		1		2		3		4		5	…		20		21		22
longueur	15	20	18	23	21	26	24	29	27	32	30	…	77	75	80	78	83	81

Ou : après avoir compris que l'allongement d'un matin à l'autre est de 3 cm, procéder ainsi par une division (80 : 3 ≈ 26,7) pour voir qu'il faudrait 27 jours ; calculer le nombre de jours, 5, qu'il aurait fallu pour arriver à 15 cm (15 : 3 = 5) et finalement soustraire 27 – 5 = 22.

Niveaux : 4 - 5

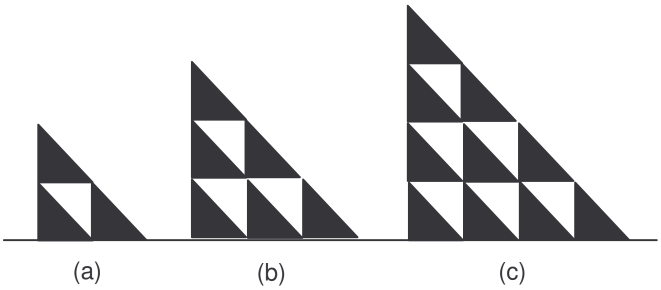
Origine : Luxembourg

7. UN TRIANGLE QUI GRANDIT (Cat. 4, 5, 6)

Pour construire la figure à deux niveaux (a), on utilise 3 triangles noirs et 1 triangle blanc.

Pour construire la figure à trois niveaux (b), on utilise 6 triangles noirs et 3 triangles blancs.

Pour construire la figure à quatre niveaux (c), on utilise 10 triangles noirs et 6 triangles blancs.



Roland a construit une figure beaucoup plus grande en utilisant exactement 55 triangles noirs.

- **De combien de niveaux se compose cette figure ?**
- **Combien de triangles blancs ont été nécessaires à Roland pour sa construction ?**

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, multiplication, soustraction
- Géométrie

Analyse de la tâche

- Comprendre que chaque figure a un niveau de plus que la précédente et essayer de dessiner les figures suivantes. Comme les triangles sont en fait des demi-carrés, le dessin en est facilité sur du papier quadrillé.
- Comprendre la construction géométrique des étages successifs supplémentaires.
- Compter les triangles noirs jusqu'à arriver à 55. On en déduit le nombre d'étages et l'on peut compter les triangles blancs que Roland a utilisés.

Ou, pour éviter les dessins, travailler dans le domaine numérique et tenir une liste précise du comptage des triangles noirs pour trouver le nombre d'étages ; par exemple:

nombre de triangles noirs :	3	6	10	15	21	28	36	45	55
nombre d'étages :	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Pour établir cette liste, comprendre la régularité de sa construction ;

soit en remarquant que l'on passe d'un nombre de triangles noirs au suivant en ajoutant 3, puis 4, puis 5, ..., puis 9 ;

soit en remarquant que le nombre de triangles noirs de la figure à n étages s'obtient en ajoutant n au nombre de triangles noirs de la figure précédente (celle qui est à $n-1$ étages).

- Se rendre compte que l'on peut ajouter à cette liste de comptage des triangles noirs une liste soigneusement coordonnée du comptage des triangles blancs, par exemple:

nombre de triangles noirs :	3	6	10	15	21	...	55
nombre d'étages :	2	3	4	5	6	...	10
nombre de triangles blancs :	1	3	6	10	15	...	45

Pour établir cette liste de comptage des triangles blancs, comprendre

soit qu'on y trouve les mêmes nombres que sur la liste du comptage des triangles noirs avec un "décalage" vers la droite de chacun des nombres de la liste ;

soit en remarquant que l'on passe d'un nombre de triangles blancs au suivant en ajoutant 2, puis 3, puis 4, ..., puis 8.

Ou : constater que le nombre de triangles noirs correspond à la somme des nombres naturels jusqu'à n (n = nombre d'étages) et que le nombre de triangles blancs correspond à la somme des nombres naturels jusqu'à $n-1$ (n = nombre d'étages) ou que ce nombre de triangles blancs est égal au nombre de triangles noirs moins n.

Ou : constater que le nombre total des triangles est 1, 4, 9, 16, ... (suite des carrés) et calculer le nombre de triangles blancs par différence.

Niveaux : 4 - 5 – 6

Origine : Suisse Romande, rencontre Bourg-en-Bresse

8. LES TROIS COFFRES (Cat. 5, 6)

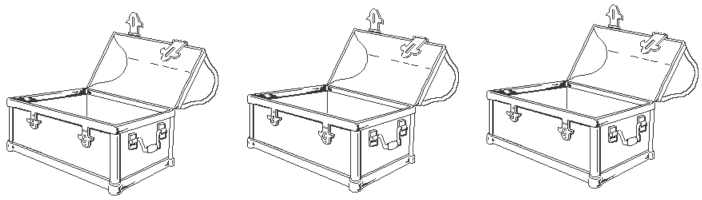
Le contenu de chacun de ces trois coffres a la même valeur que 30 pièces d'or.

Dans chaque coffre, il n'y a que des lingots.

Dans le premier coffre, il y a 4 petits lingots et 1 lingot moyen.

Dans le second coffre, il y a 2 petits lingots et 2 lingots moyens.

Dans le troisième coffre, il y a 1 lingot moyen et 1 grand lingot.



Combien de pièces d'or vaut un petit lingot ?

Combien de pièces d'or vaut un lingot moyen ?

Combien de pièces d'or vaut un grand lingot ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : échanges, équivalences, proportionnalité
- Logique

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que, si chaque valeur de coffre est de 30 (pièces d'or), les coffres sont équivalents entre eux, bien qu'ils ne contiennent que des lingots différents soit en nombre soit en grandeur.

  Tirer, de l'équivalence entre les contenus des deux premiers coffres : 4p +1m = 2p + 2m (p désigne la valeur d'un petit lingot, m désigne la valeur d'un lingot moyen) une équivalence plus simple en retirant 2 p dans chaque coffre : 2p + 1m = 2m, puis une dernière équivalence encore plus simple, en retirant 1 m de chaque coffre, pour arriver à l'équivalence : 2p = 1m.

  De la même manière, tirer de l'équivalence entre les contenus du premier et du troisième coffre : 4p+1m=1m+1g (g désigne la valeur d'un grand lingot) l'équivalence plus simple : 4p = 1g.

  On peut donc par substitution, entre les relations 2p = 1m et 4p = 1g, obtenir la relation 1g = 2m.
- À l'aide des relations précédentes, voir que les contenus de chacun des coffres peuvent s'exprimer, après substitution, avec une seule sorte de lingots ; par exemple des petits lingots :

  le contenu du premier coffre est de : 4p+1m = 4p+2p = 6p ;

  le contenu du deuxième coffre est de : 2p+2m = 2p+2x2p = 2p+4p = 6p ;

  le contenu du troisième coffre est de : 1m+1g = 2p+4p = 6p.

  Ceci permet de passer à la « mesure » de chaque lingot en pièces d'or. Comprendre que 6 petits lingots valent 30 pièces d'or et donc qu'un petit lingot vaut 5 pièces d'or (30 : 6 = 5) ; trouver la valeur d'un lingot moyen (10 = 2 x 5) et d'un grand lingot (20 = 4 x 5) : m = 10 pièces d'or et g = 20 pièces d'or.

Ou : procéder par essais, au hasard ou organisés. Par exemple, à partir du contenu du troisième coffre, postuler que m = 12 et g = 18, ce qui conduira à une contradiction en vérifiant ces valeurs de m et g pour les contenus des deux autres coffres.

Puis, ce qui peut paraître naturel, essayer les valeurs m = 10 et g = 20, qui permet de trouver p = 5 par observation du contenu du deuxième coffre et enfin de vérifier ces valeurs pour le contenu du premier coffre.

Ou : travailler avec des représentations graphiques des lingots et des équivalences, plus faciles pour appliquer les règles d'équivalence (par exemple sous forme de balance à équilibrer).

Niveaux : 5 - 6

Origine : Suisse Romande, rencontre Bourg-en-Bresse

9. LES CAMARADES DE JUDITH (Cat. 5, 6)

Judith a remarqué que, dans sa classe, il y a quelques élèves qui ont les cheveux noirs et les yeux bleus. Comme Judith est curieuse de nature, elle se met à observer tous les élèves des quatre classes de son école.

Après quelques jours, elle découvre que :

- la moitié des élèves sont des garçons,
- un tiers des élèves ont les cheveux noirs,
- en divisant le nombre d'élèves de l'école par 7, on trouve le nombre des élèves qui ont les yeux bleus,
- dans chaque classe, il y a au moins 20 élèves mais pas plus de 30.

Dans les quatre classes observées par Judith, combien d'élèves n'ont pas les yeux bleus ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre solution.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance :

- Arithmétique : fraction, multiplication, divisibilité, comparaison de nombres

Analyse de la tâche :

- Comprendre que le nombre des élèves doit être un multiple de 2, de 7 et de 3, donc de 42 qui est leur plus petit commun multiple (ppcm) : 42, 84, 126, 168...
- Examiner les nombres précédents (multiples) par rapport aux valeurs 80 (20 x 4) et 120 (30 x 4), qui sont le minimum et le maximum possibles d'élèves.
- Conclure que les élèves observés sont au nombre de 84. Donc que 84 - (1/7)84 = 72 (ou bien (6/7)84 est le nombre des élèves qui n'ont pas les yeux bleus.

Ou (pour les élèves qui ne connaissent pas le ppcm) :

- Situer le nombre d'élèves entre 80 et 120 (selon la dernière indication), puis chercher dans cet intervalle les nombres qui se divisent par 7 (à partir de 77 : 84, 91, 98, 105, 112 et 119), éliminer ensuite les impairs (il ne reste plus que 84, 98 et 112) et enfin trouver que 84 est le seul des nombres encore en liste qui est divisible par 3.
- Calculer comme précédemment le nombre des élèves qui ont les yeux bleus : 84 : 7 = 12 et soustraire ce nombre de 84 pour connaître le nombre d'élèves qui n'ont pas les yeux bleus.

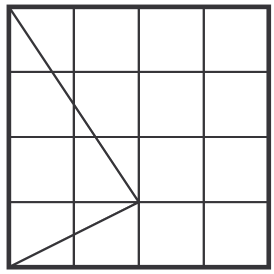
Niveaux : 5 - 6

Origine : Parma

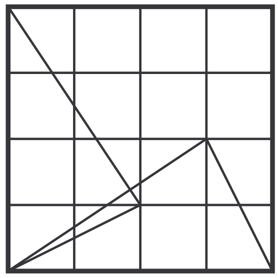
10. KALÉIDOSCOPE I (Cat. 6, 7)

Vous disposez de deux cartes carrées transparentes. Sur chacune d'elle est dessiné un quadrillage et un triangle comme le montre la figure ci-contre :

(Le quadrillage et le triangle se voient d'un côté comme de l'autre puisque les cartes sont transparentes.)



Si l'on superpose les deux cartes en faisant coïncider leurs bords, on peut obtenir, par exemple, cette figure, qui n'a pas d'axe de symétrie :



Toujours en superposant exactement les 2 cartes, combien de figures différentes, mais avec un axe de symétrie, peut-on obtenir ?

Dessinez toutes les figures différentes, avec un axe de symétrie, que vous avez trouvées.

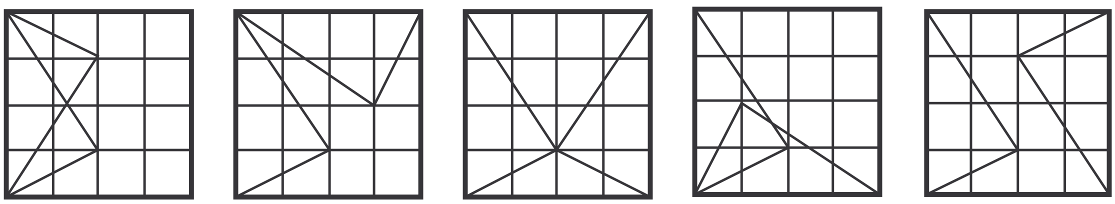
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

- Géométrie : transformations dans le plan, symétrie et rotation

Analyse de la tâche :

- Construire les deux cartes sur une feuille transparente ou sur une feuille quadrillée en pensant à représenter le triangle sur les deux faces du papier comme si la feuille était transparente ; ou dessiner sur des carrés les figures obtenues par rotation et par retournement d'un des deux triangles et vérifier si les figures obtenues possèdent un axe de symétrie
- Découvrir les quatre figures ayant un axe de symétrie 1, 2, 3, 4, obtenues par retournement d'une des cartes et rotations successives d'un quart de tour. Remarquer qu'il faut écarter la figure 5 qui présente une symétrie centrale mais pas axiale.

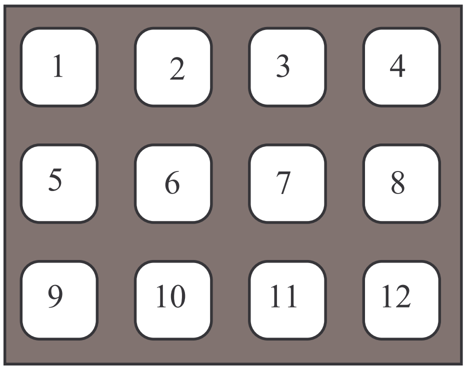


1 2 3 4 5

Niveaux : 6 - 7
Origine : Aosta

11. LE TRÉSOR DANS LE COFFRE-FORT (Cat. 6, 7, 8)

L'ouverture d'un coffre-fort est commandée à partir d'un clavier comme celui représenté par la figure ci-contre. En pressant les touches numérotées, les nombres correspondants sont additionnés et lorsque cette somme vaut 21, le coffre-fort s'ouvre et le trésor apparaît.



Mais attention ! Il faut obtenir exactement 21, ni plus, ni moins. L'ordre dans lequel on appuie sur les touches n'a pas d'importance. Une même touche peut être utilisée plusieurs fois.

Rita aimerait que le coffre s'ouvre après avoir pressé exactement 8 touches, mais sans jamais presser la touche numérotée 1.

De combien de manières Rita peut-elle ouvrir le coffre-fort ?

Indiquez toutes les possibilités et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE À PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition de nombres naturels
- Logique
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'on ne peut obtenir une somme de 21 en 8 termes que si la plupart des termes sont « petits » (et différents de1)
- Comprendre qu'il ne peut pas y avoir de solutions où le plus petit nombre est un 3 ; en effet on aurait $S \geq 8 \cdot 3 > 21$
- On peut essayer de grouper les solutions suivant le nombre de fois que Rita presse la touche 2. Il y a 7 solutions :

  7 x 2 + 7   6 x 2 + 3 + 6   6 x 2 + 4 + 5   5 x 2 + 3 + 3 + 5   5 x 2 + 4 + 4 + 3

  4 x 2 + 3 + 3 + 3 + 4   3 x 2 + 3 + 3 + 3 + 3+ 3

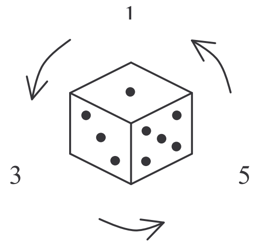
Niveaux : 6 - 7 - 8

Origine : Luxembourg

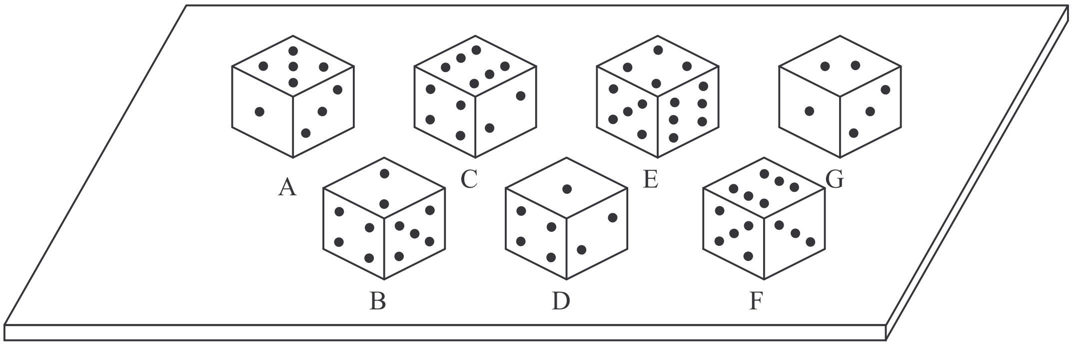
12. LES DÉS (CAT. 6, 7, 8)

Un dé (de type « occidental ») est construit correctement s'il respecte les règles suivantes :

- la somme des nombres inscrits sur deux faces opposées est 7 ;
- si l'on regarde le dé de façon à voir les trois faces indiquant un nombre impair, on remarque que le « un », le « trois » et le « cinq » sont placés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.



La figure suivante montre sept dés déposés sur une table. Parmi eux, trois dés « irréguliers » ont été insérés.



Indiquez quels sont ces trois dés et en quoi ils sont irréguliers.

Indiquez comment vous avez procédé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

- Géométrie : visualisation dans l'espace ; les sens de rotation (trigonométrique et des aiguilles d'une montre) ; les propriétés des cubes

Analyse de la tâche

- Comprendre la règle pour la construction correcte d'un cube et procéder au contrôle de chaque cube dessiné.
- Se rendre compte que les dés à écarter sont : le dé B parce que les nombres inscrits sur deux faces consécutives ont pour somme 7 ; le dé C parce que sur les faces "paires", les nombres 2, 4 et 6 (opposés à 5, 3, 1) se succèdent dans le sens des aiguilles d'une montre ; le dé G parce que, le nombre "cinq" se trouve sur la face posée sur la table, donc les trois faces "impaires", 1, 3, 5 sont placées dans le sens des aiguilles d'une montre. Les autres dés, A, D, E et F, sont donc réguliers.
- Éventuellement, employer un dé, directement disponible ou construit à partir du développement d'un cube et indiquer sur ces faces les nombres de 1 à 6 en respectant les consignes de construction, pour vérifier que les configurations A, D, E et F sont possibles ; de même pour justifier que les dés B, C et G sont irréguliers.

Niveaux : 6 - 7 - 8

Origine : Siena

13. LES ONCLES DE PIERRE (Cat. 6, 7, 8)

Pierre décide de rendre visite à ses trois oncles Antoine, Bruno et Charles. Il sait que :

- la maison de l'oncle Antoine est à 20 minutes de chez lui, à 40 minutes de celle de l'oncle Bruno et à 35 minutes de celle de l'oncle Charles.
- la maison de l'oncle Bruno est à 25 minutes de chez lui et à 45 minutes de celle de l'oncle Charles
- la maison de l'oncle Charles est à 50 minutes de chez lui.

Pierre désire partir de chez lui, rendre visite à ses trois oncles et rentrer chez lui, en prenant le moins de temps possible pour tous ces déplacements.

Dans quel ordre devra-il rendre visite à ses trois oncles ?

Combien de temps prendra-t-il en tout pour se déplacer ?

Indiquez les solutions possibles et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissance :

- Arithmétique : addition
- Géométrie : orientation et déplacement, représentation graphique
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Faire un dessin sur lequel se trouvent les maisons des 3 oncles et celle de Pierre (A, B, C, P), les liaisons entre elles et les durées de chaque déplacement, et y reconnaître les 6 parcours possibles : PA–AB-BC-CP, PA-AC-CB-BP, PB-BA-AC-CP, PB-BC-CA-AP, PC-CA-AB-BP, PC-CB-BA-A.

Ou : énumérer les 6 permutations de A, B et C (se rappeler que tous les parcours partent de P et reviennent en P) : PABCP ; PACBP ; PBACP ; PBCAP ; PCABP ; PCBAP. et remarquer qu'ils vont par couples de deux (FJ)

Ou : sur une représentation en arbre, procéder en privilégiant le déplacement qui dure le moins de temps à chaque ajout de trait et confronter les durées totales à la fin.

- Dans chaque cas, pour chaque parcours, calculer la durée totale en additionnant les durées intermédiaires et arriver à la conclusion que les deux parcours possibles (en sens inverse l'un de l'autre) qui demandent le moins de temps (125 minutes) sont PACBP, PBCAP. (Les autres durées sont 155 pour PABCP et PCBAP, et 150 pour PBACP et PCABP.)

Niveaux : 6 - 7 - 8
Origine : Siena

14. AVENTURE SUR LA RIVIÈRE (Cat. 7, 8)

Durant une excursion en montagne, un groupe de touristes a dû traverser une rivière à un endroit où il était possible de passer d'une rive à l'autre en sautant sur 15 grosses pierres successivement.

Tout le groupe a traversé la rivière en 3 minutes de la façon suivante :

- le premier touriste a sauté sur la première pierre, puis quand il est passé sur la deuxième pierre, le deuxième touriste a sauté sur la première pierre.
- quand le premier touriste est passé sur la troisième pierre, le deuxième touriste a sauté sur la deuxième pierre et le troisième sur la première.
- ainsi de suite, l'un après l'autre, tous les touristes du groupe ont sauté sur les 15 pierres en respectant le rythme d'un saut toutes les 2 secondes.

Combien de touristes y a-t-il dans le groupe ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

Arithmétique

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'avec 15 pierres, il y aura 16 sauts de 2 secondes.
- Comprendre qu'après 32 sec (16 x 2), le premier touriste arrive sur la rive opposée et que, par la suite, toutes les 2 secondes un autre touriste rejoint la rive.
- Tenir compte du fait qu'après 3 min (180 sec) tous les touristes sont passés sur l'autre rive.
- Procéder empiriquement en notant le temps d'arrivée de chaque touriste jusqu'à 180 secondes :
  32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, … 178, 180 (soit 75 touristes)

Ou déterminer directement la durée par le nombre de multiples de 2 entre 32 et 180 par le calcul : (180-32)/2 + 1 = 75

Ou, en pensant qu'à partir de 30 secondes (lorsque le premier est sur la dernière pierre) il arrivera une personne toutes les 2 secondes sur l'autre rive, avec le calcul correspondant : (180 – 30)/2 = 75

Ou : construire un tableau du genre :

nombre de personnes	1	2	3	…	10	20	30	40	50	60	70	80
temps nécessaire, en secondes	32	34	36	…	50	70	90	110	130	150	170	190

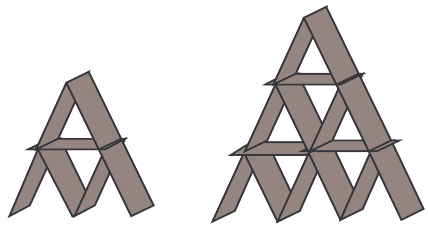
vu que 180 secondes est la moyenne entre 170 et 190, alors, le nombre correspondant des personnes sera la moyenne de 70 et 80, c'est-à-dire 75.

Niveaux : 7 - 8

Origine : Siena

15. CHÂTEAU DE CARTES (Cat. 7, 8)

Andréa s'amuse à construire des châteaux avec des cartes à jouer. Elle a construit deux châteaux : le premier a deux niveaux et est fait de 7 cartes ; le deuxième a trois niveaux et est fait de 15 cartes.



Combien de cartes Andréa devrait-elle utiliser pour construire un château de 25 niveaux ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance

- Arithmétique : addition et multiplication
- Logique : capacité de déduction et d'abstraction
- Algèbre

Analyse de la tâche :

- Comprendre la règle de construction des châteaux et comprendre comment passer d'un château au suivant (avec un niveau en plus)
- Après avoir dessiné les premiers châteaux, passer au registre numérique et établir un lien entre le nombre de niveaux et le nombre de cartes :

niveaux	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	25
cartes	2	7	15	26	40	57	…				

et comprendre que pour passer d'un château au château suivant, il faut ajouter un nombre de cartes égal à la différence entre les nombres de cartes des deux niveaux précédents augmenté de trois :

+ 5 + 8 + 11 +14 +17 +20 +23 +26 …

Continuer numériquement jusqu'au 25e niveau et écrire tous les résultats intermédiaires (en s'aidant éventuellement d'une calculatrice)

cartes	2	7	15	26	40	57	77	100	126	…	950

Ou : chercher une relation entre le nombre des niveaux et le nombre de cartes du château correspondant. Par exemple :

Remarquer que, dans le premier château, le niveau 1 (celui le plus haut) est formé de 3 (3 x 1) cartes (un triangle complet) alors que le 2e niveau, celui de la base, est formé de 4 (3 x 2 - 2) cartes (deux triangles privés de leur base respective) ; dans le deuxième château, le niveau 1 est formé de 3 cartes (3 x 1 ; un triangle complet), le niveau 2 est formé de 6 cartes (3 x 2 ; deux triangles complets), le niveau 3, la base, est formé de 6 cartes (3 x 3 – 3 ; trois triangles sans les bases). Essayer de dessiner des châteaux plus hauts et découvrir que la règle qui fournit le nombre de cartes sur le plan n est : $3n$ si n n'est pas le plan de base du château, $3n - n = 2n$ si n est le plan de base du château. Arriver ainsi à établir que pour construire un château de n niveaux, il faut $3(1+2+3+......\ n-1)+2n$ cartes.

Ou encore : observer que le nombre de "triangles" que l'on peut trouver dans un château à n niveaux est n^2 et que donc le nombre des côtés des triangles est $3n^2$. Considérer ensuite que chaque côté à l'intérieur du château est compté deux fois et que les triangles du niveau le plus bas ne sont pas complets. En conclure que le double du nombre de cartes nécessaires pour construire un château de n plans est donné par $(3n^2 + 2n - n)$ et que donc $(3n^2 + n)/2$ est le nombre de cartes nécessaires à la construction d'un château de n niveaux.

Ou encore : observer que pour un château de n niveaux, il faut $2(1 + 2 + 3 + … + n)$ cartes obliques et $(1 + 2 + 3 + … + n – 1$ cartes horizontales. Donc en tout $n(n+1) + n(n – 1)/2 = (3n^2 + n)/2$

- Conclure que pour un château de 25 niveaux, il faudra 950 cartes.

Niveaux : 7 - 8

Origine : Siena

16. NUMÉROS GAGNANTS (Cat.7, 8)

Louis organise une loterie : il prépare 2000 billets, numérotés de 1 à 2000, pliés de manière qu'on ne puisse pas lire le numéro et les place dans un panier. En payant 1 euro, on a le droit de tirer un billet.

- Les numéros gagnants sont ceux qui sont formés de 2, 3 ou 4 chiffres consécutifs en ordre croissant (par exemple : 45 et 234 sont des numéros gagnants tandis que 54 et 457 ne le sont pas).
- Un numéro gagnant rapporte 10 euros.

Combien de billets au minimum devront être tirés pour que Louis soit certain de ne pas perdre d'argent ?

Expliquez votre solution.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissance :

- Arithmétique : différence entre chiffre et nombre, numération, opérations
- Logique : raisonnement, dénombrement organisé

Analyse de la tâche

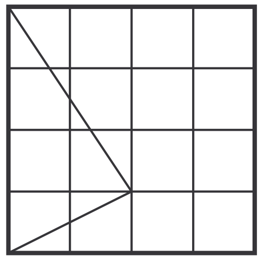
- Se rendre compte que parmi les 2000 nombres, seuls 16 sont des numéros gagnants ; ce qui peut être facilement vérifié en les énumérant (12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789, 1234) ou bien trouver ces nombres en s'appuyant sur leur structure (avec deux chiffres à partir de 12 il n'y en a qu'un par dizaine jusqu'à 89 ; avec trois chiffres, à partir de 123 il n'y en a qu'un par centaine jusque 789 ; et enfin à quatre chiffres, il n'y a que 1234)
- Comprendre que 160 euros est la somme totale à payer pour les numéros gagnants (16x10) et qu'il faut vendre 160 billets pour récupérer cette somme.
- Conclure que Louis doit vendre au moins 160 billets pour être certain de ne pas remettre d'argent personnel, dans la pire des hypothèses où les 16 numéros gagnants se trouvent dans les 160 premiers billets vendus.

Niveaux : 7 - 8
Origine : Siena

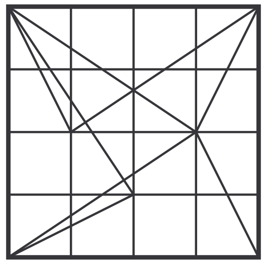
17. KALÉIDOSCOPE II (Cat. 8)

Vous disposez de quatre cartes carrées transparentes. Sur chacune d'elle est dessiné un quadrillage et un triangle, comme le montre la figure ci-contre :

(Le quadrillage et le triangle se voient d'un côté comme de l'autre puisque les cartes sont transparentes.)



Si l'on superpose parfaitement les quatre cartes selon leurs bords, de manière à ce qu'aucun des quatre triangles ne coïncide avec un autre, on peut obtenir, par exemple, cette figure, qui n'a pas d'axe de symétrie :



Toujours en superposant parfaitement les quatre cartes, combien de figures différentes, composées de quatre triangles distincts et avec au moins un axe de symétrie, peut-on obtenir ?

Dessinez toutes les figures différentes que vous avez trouvées, avec quatre triangles distincts et au moins un axe de symétrie.

ANALYSE A PRIORI

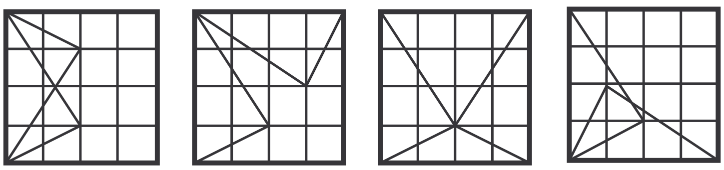
Domaine de connaissances

- Géométrie : transformations dans le plan, symétrie et rotation

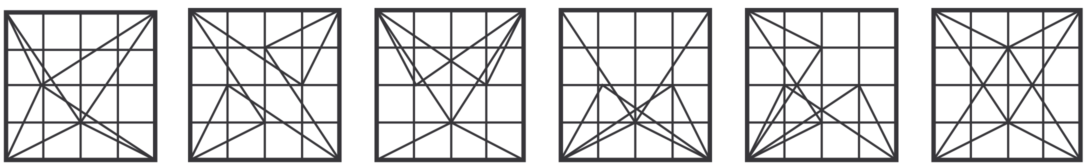
Analyse de la tâche :

- Construire les quatre carrés sur une feuille transparente ou sur une feuille quadrillée en pensant à représenter le triangle sur les deux faces du papier comme si la feuille était transparente et chercher les solutions possibles en se donnant une méthode (par exemple, placer deux cartes de manière à ce qu'elles soient symétriques entre elles, et essayer de placer les deux autres de manière symétrique aussi)

Ou : trouver les figures demandées en dessinant, par exemple, d'abord sur un carré les figures symétriques différentes qu'on obtient par la superposition de deux cartes (comme sur les figures ci-dessous)



et, successivement, en dessinant les symétriques de ces figures par rapport aux axes de symétrie du carré



- Découvrir que l'on peut construire 6 figures différentes avec un axe de symétrie

Niveaux : 8
Origine : Aoste