No	**titre**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Ar.**	**Alg.**	**Géo.**	**Lo.**	**Co.**	**Orig.**
1	**Nel paese Piovepoco (I) / A la fontaine (I)**	3						x					CA
2	**Da un piano all'altro / D'un étage à l'autre**	3						x					BL
3	**L'età dei nonni / L'âge des grands-parents**	3	4					x					TI
4	**Colorare / Coloriage**	3	4	5						x	x		BB
5	**Les dominos de Dominique / I domino di Lilli**	3	4	5						x	x		C.I
6	**Des fleurs devant l'école / I fiori davanti alla scuola**		4	5	6			x			x		BB
7	**Il tempio greco / Le temple grec**		4	5	6			x	x				BL
8	**Nel paese Piovepoco (II) / A la fontaine (II)**		4	5	6			x					CA
9	**Strana pizza / Drôle de pizza**			5	6			x	x		x		PR
10	**Coloriage bizarre / Un bizzarro modo di colorare**			5	6	7		x		x	x		BB
11	**La feuille de timbres / Il foglio dei francobolli**				6	7	8	x		x			L0,SR
12	**Voyages / I Viaggi**				6	7	8	x					BL
13	**Cifre uguali / Chiffres égaux**					7	8	xx			x		Riv
14	**Combien de distances ? / A quale distanza?**					7	8		x	x			BB
15	**Un gioco di carte / Jeu de cartes**					7	8	xx				x	PR
16	**Chifre in movimento / Chiffres mobiles**					7	8	xx			x		SI
17	**Torta o tortine / Gâteaux : gros ou petits ?**						8	x	x	xx			PR

1. À LA FONTAINE (Cat. 3)

Deux amies, Laure et Pauline, vont chercher de l’eau avec un seau à la fontaine Eauclaire.

Leurs deux seaux contiennent ensemble 24 litres. Avec le seau de Laure on peut remplir exactement 3 fois le seau de Pauline.

Combien de litres contient le seau de Pauline ?

Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : les quatre opérations, multiples, fractions simples (quart)

Analyse de la tâche

- Comprendre que le seau de Pauline est trois fois plus petit en volume que le seau de Laure (a).
- Comprendre que 24 l est la somme des contenances des deux seaux (b).
- Obtenir 24 comme somme de deux nombres dont l'un est le triple de l'autre, par essais et réajustements.

  Ou obtenir 24 comme somme de deux nombres dont l'un est le triple de l'autre, par écriture systématique des couples possibles et calcul de la somme correspondante : (1, 3) ; (2, 6) ; (3, 9) ; (4, 12)... jusqu’à (6, 18).

  Solution identique, avec schématisation : □ □ □

  □□□ □□□ □□□

- Déduire des informations (a) et (b) que 24 l représente 4 fois la contenance du seau de Pauline et, à partir de là, déterminer cette contenance, c'est-à-dire 6 l, soit par essais additifs ou multiplicatifs, soit par reconnaissance du fait que le nombre qui, multiplié par 4 donne 24 est 6 ou encore en divisant 24 par 6.

Niveau : 3

Origine : CRSEM – Cagliari

2. D'UN ÉTAGE À L'AUTRE (Cat. 3)

Six amies habitent dans le même immeuble de la rue Pythagore, chacune à un étage. Caroline habite au rez-de-chaussée ; Angeline habite au premier étage ; Marie habite au deuxième étage, puis il y a Céline, Doris et enfin Joséphine qui habite au cinquième étage. Il y a toujours le même nombre de marches entre deux étages.

Caroline se rend d'abord chez Marie en montant 28 marches.

Puis, accompagnée de Marie, elle reprend l'escalier pour aller chez Joséphine.

Combien de marches Caroline et Marie doivent-elles monter pour aller de l'étage de Marie à celui de Joséphine ?

Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, multiplication, proportionnalité

Analyse de la tâche

- Comprendre que du rez-de-chaussée (Caroline) à l'étage de Marie (2e) il y a 2 étages, et que de l'étage de Marie à celui de Joséphine (du 2e au 5e) il y en a 3.

  Comme Caroline monte 28 marches pour monter 2 étages, déduire qu'il y a 14 marches entre 2 étages, et donc 42 marches pour les 3 étages qui séparent Marie de Joséphine

  Ou bien déduire que les nombres de marches successifs sont proportionnels à 2 et 3, et que, comme il y a 28 marches pour 2 étages, il y a 42 marches pour monter de l'étage de Marie à celui de Joséphine (solution peu probable pour les élèves de niveau 3).

  Ou utiliser un schéma avec le nombre de marches entre deux étages et additionner les nombres soulignés :

Joséphine	
	<u>14 marches</u>
Doris	
	<u>14 marches</u>
Céline	
	<u>14 marches</u>
Marie	
	14 marches
Angeline	
	14 marches
Caroline	

Niveau : 3

Origine : Belluno

3. L’ÂGE DES GRANDS-PARENTS (Cat. 3, 4)

- Dis-moi, Camille, quel âge ont tes grands-parents ?
- Je peux te dire que si j’additionne leurs âges, je trouve 132.
- Donne-moi un renseignement de plus.
- Mon grand-père a 6 ans de plus que ma grand-mère.
- Et ils vivent ensemble depuis longtemps ?
- Ils se sont mariés, il y a exactement 42 ans.

Quel âge avaient les grands-parents de Camille le jour de leur mariage ?

Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction
- Logique

Analyse de la tâche

- Comprendre qu’il faut d’abord chercher l’âge actuel des grands-parents, et pour cela :

  Comprendre qu’il faut chercher un couple de nombres dont la somme est 132 et la différence est 6.

  Procéder par essais et ajustements.

  Ou prendre la moitié de 132 et lui ajouter et lui enlever 3

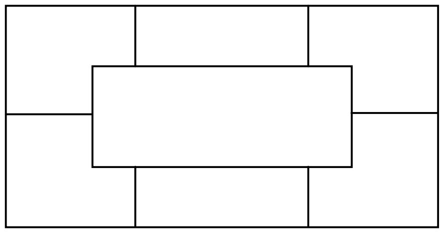
  Ou enlever 6 à 132, prendre la moitié du résultat (âge de la grand-mère : 63 ans), et ajouter 6 pour obtenir l'âge du grand-père (69 ans)

  Le raisonnement précédent peut être soutenu par l’utilisation d’une schématisation, par exemple avec des segments
- Soustraire 42 à chaque âge pour obtenir leurs âges au moment du mariage.
- Raisonner du point de vue de la numération : les chiffres des unités des deux âges actuels peuvent être (0, 6) ou (1, 7) ou (2, 8) ou (3, 9) ou (4, 0) ou (5, 1) ou (6, 2) ou (7, 3) ou (8, 4) ou (9, 5) : seuls (3, 9) et (8, 4) permettent d’obtenir 2 comme chiffre des unités de la somme. Avec (3, 9) on obtient la solution (63, 69) qui est valide ; avec (8, 4), on peut essayer (58, 64) ou (68, 74) qui ne conviennent pas.

Niveaux : 3 - 4

Origine : Ticino

4. COLORIAGE (Cat. 3, 4, 5)



Léa veut colorier un pavage comme celui-ci, en respectant les conditions suivantes :

- chaque partie doit être d'une seule couleur ;
- le bleu touche toutes les couleurs ;
- le rouge et le jaune sont dans les coins gauches ;
- le rouge, le violet et le noir ne touchent pas le vert ;
- l'orange touche le noir.

Dessinez tous les coloriages différents que peut trouver Léa, en respectant toutes ces conditions.

Expliquez comment vous avez fait pour les trouver.

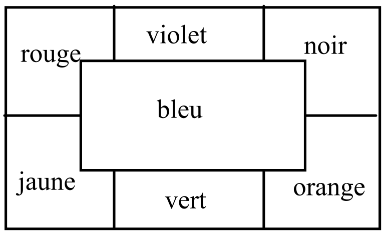
ANALYSE A PRIORI

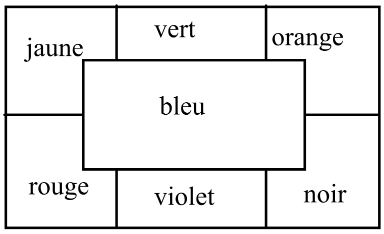
Domaines de connaissances

- Logique, raisonnement déductif
- Géométrie : latéralisation, dispositions relatives spatiales

Analyse a priori

- Comprendre que le bleu occupe forcément la case centrale.
- Comprendre que le rouge et le jaune ne peuvent occuper chacun alternativement que deux positions (en haut à gauche et en bas à gauche).
- Avoir repéré que toutes les cases de la périphérie touchent chacune trois couleurs, dont le bleu.
- Déduire que le vert ne peut toucher que le jaune, le bleu et le orange et donc que le vert est forcément voisin du jaune (donc seulement deux possibilités).
- Placer ensuite l'orange à côté du vert, puis le noir à côté du orange et enfin le violet.
- Ou procéder par essais, en vérifiant le respect des contraintes.



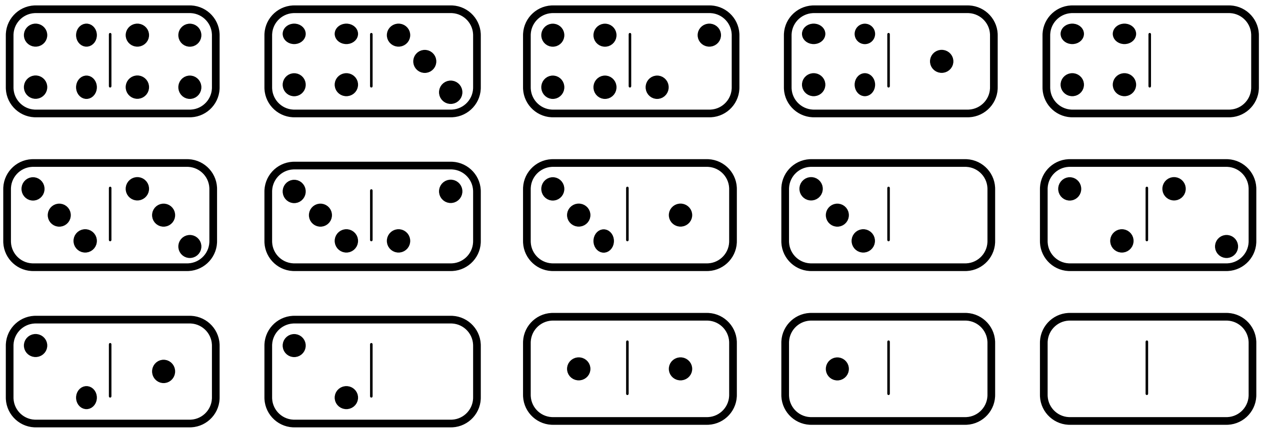


Niveaux : 3 - 4 - 5

Origine : Bourg-en-Bresse

5. LES DOMINOS DE DOMINIQUE (Cat. 3, 4, 5)

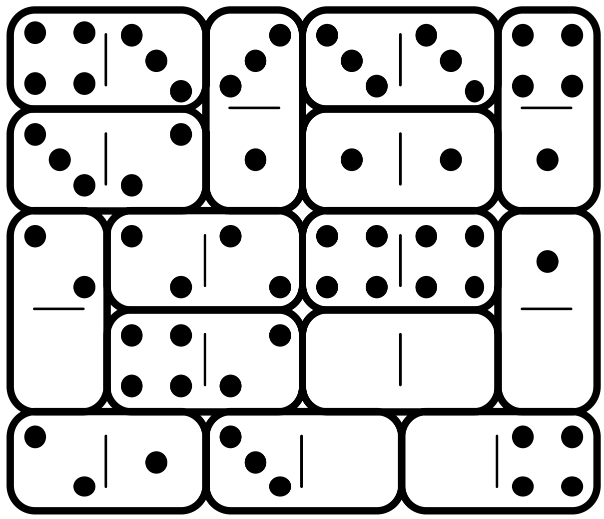
Voici les 15 pièces du jeu de domino de Dominique :



Dominique doit les placer sur ce tableau, selon le nombre de points indiqué dans chaque case.

4	3	3	3	3	4
3	2	1	1	1	1
2	2	2	4	4	1
0	4	2	0	0	0
2	1	3	0	0	4

Voici son travail !



Voici maintenant un autre tableau :

1	3	1	4	0	2
3	2	2	4	0	3
0	3	2	4	0	4
2	3	1	4	1	1
0	0	1	3	4	2

Dominique a déjà marqué la place de l'une des pièces sur ce tableau.

Comment Dominique va-t-elle placer ses 14 autres pièces sur ce nouveau tableau ?

Pour répondre, vous pouvez soit dessiner le contour de chaque pièce, soit découper les 15 pièces et les coller à la bonne place.

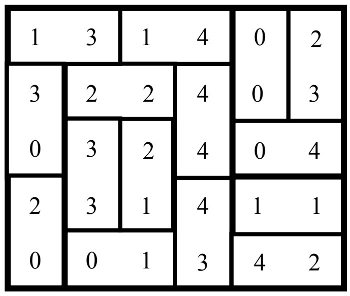
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : pavage selon des contraintes données
- Logique : déductions successives

Analyse de la tâche

- S’approprier l’énoncé en constatant qu’il y a 15 pièces de domino, tous différents, permettant de recouvrir les 30 cases de la grille, mais qu’on ne peut pas les placer toutes horizontalement, ni toutes verticalement pour que les nombres de points correspondent aux indications des cases.
- Se rendre compte que, pour la plupart des pièces de domino, il y a plusieurs emplacements possibles, qu’il faudra faire des choix et travailler par hypothèses successives : on part sur un essai de placement des premières pièces de domino puis on vérifie si la suite est réalisable.
- Repérer la pièce de domino (3 - 3) déjà placée et celles restant à placer.
- Constater que deux choix sont possibles pour l’angle inférieur gauche : 0 - 0 horizontalement ou 0 - 2 verticalement. (Le 0 - 0 conduira à une impasse puisqu’il contraint à choisir 2 - 0 à gauche du 3 - 3 et, par conséquent à choisir 2 - 3 dans l’angle supérieur droit et à se retrouver avec un nouveau 0 - 0 dans cette région.). Le 2 - 0 est alors la seule possibilité, et induit 3 - 0, 1 - 3, 2 - 2, etc. Poursuivre ainsi la chaîne de déduction en respectant les contraintes d’emboîtement pour aboutir à la solution unique suivante :



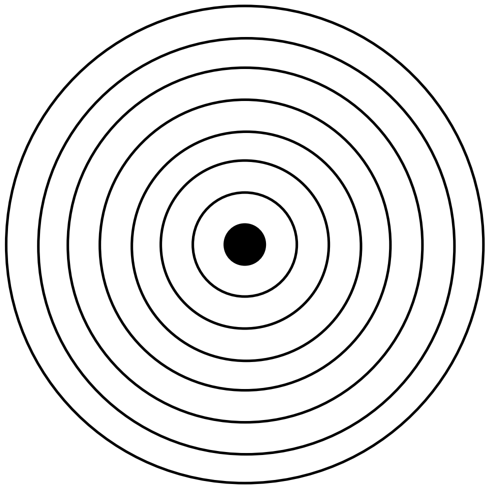
- Ou travailler par essais successifs, en éliminant les dispositions impossibles jusqu’à l’obtention de la solution.

Niveaux : 3 - 4 - 5

Origine : D’après le jeu classique « La boîte de rangement » (Math-Ecole 151, Jeux 5 APMEP), adapté par C.I.

6. DES FLEURS DEVANT L'ÉCOLE (Cat. 4, 5, 6)

Monsieur Belplante décide d'aménager un massif de fleurs devant l'école. Il partage le massif en 7 anneaux, comme sur ce dessin.



Puis, il procède en suivant toujours une même règle pour les tulipes et une autre pour les roses, de la façon suivante :

- dans le premier anneau, en partant du centre, il plante 2 tulipes et 3 roses ;
- dans le deuxième anneau, il plante 5 tulipes et 7 roses ;
- dans le troisième anneau, il plante 8 tulipes et 15 roses ;
- dans le quatrième anneau, il plante 11 tulipes et 27 roses ;
- et ainsi de suite jusqu'au septième anneau.

Selon vous, combien de fleurs plantera-t-il en tout dans le septième anneau ?

Expliquez comment vous avez trouvé la réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, multiplication
- Logique

Analyse de la tâche

- Comprendre que pour chaque variété de fleurs, la suite des nombres de plants dans les différents anneaux en s'écartant du centre, s'obtient en respectant une règle, la règle étant différente pour chaque variété.
- Pour chaque suite, émettre des hypothèses sur les relations arithmétiques existant entre deux termes consécutifs de la suite et en contrôler l'exactitude.

  Si $n = 1$ correspond au rang de l'anneau le plus proche du centre et si t_n et r_n représentent respectivement le nombre de tulipes et de roses dans l'anneau de rang n,

  Pour les tulipes : $t_{n+1} = t_n + 3$ ou $t_n = 3n - 1$

  Pour les roses : $r_{n+1} = r_n + 4n$
- Calculer le nombre de fleurs de chaque variété dans le septième anneau et faire la somme des deux nombres.
- Autre démarche possible : Calculer le nombre total de fleurs dans chacun des premiers anneaux : 5 ; 12 ; 23 ; 38, constater que la différence des nombres de fleurs est en progression de 7 ; 11 ; 15. Émettre l'hypothèse que l'augmentation du nombre de fleurs entre le n^e et le $n+1^e$ anneau est $\Delta_n = \Delta_{n-1} + 4$, si Δ_n désigne la différence de nombre de fleurs entre le n^e et le $n + 1^e$ anneau pour $n \geq 2$ et $\Delta_1 = 7$. Utiliser cette règle pour déterminer le nombre total de fleurs dans le septième anneau.

Niveau : 4 - 5 - 6

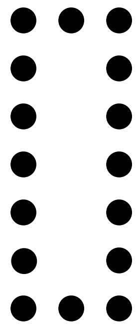
Origine : Bourg-en-Bresse

7. LE TEMPLE GREC (Cat. 4, 5, 6)

Mario veut réaliser une maquette de temple grec avec des blocs d'un jeu de construction. Il a lu que les temples grecs étaient de forme rectangulaire et qu'ils étaient entourés de colonnes.

Le temple que veut construire Mario doit avoir ces caractéristiques :

- le nombre de colonnes disposées sur une longueur du rectangle vaut un de plus que le double du nombre de colonnes disposées sur une largeur ;
- il y a une colonne à chaque coin du temple ;
- il y a toujours plus de deux colonnes sur une largeur.



Sur ce schéma, est représenté le plus petit temple qu'il est possible de construire.

Mario dispose de 35 pièces en forme de colonnes. Il essaie de construire tous les temples possibles. Lorsqu'il en a construit un, il le dessine, puis le détruit pour essayer d'en réaliser un autre.

Combien de temples Mario peut-il réaliser ?
Combien chaque temple aura-t-il de colonnes sur sa longueur et sur sa largeur ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos solutions.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : relations multiplicatives et additives entre nombres
- Géométrie : rectangle

Analyse de la tâche

- Comprendre la relation entre les nombres de colonnes disposées sur chaque dimension.
- Comprendre que les colonnes "de coin" ne doivent pas être comptées deux fois.
- Procéder en essayant les différents schémas et dénombrer les colonnes dessinées.
- Trouver les solutions en fixant successivement le nombre n de colonnes possibles sur la largeur, chercher le nombre de colonnes sur la longueur et dénombrer le total des colonnes (en s'aidant éventuellement d'un schéma)

  Si $n = 3$, il y a 7 colonnes (3 x 2+1) sur la longueur et au total 16 colonnes (7+3+7+3-4 ou 2+6+2+6).

  Si $n = 4$, il y a 9 colonnes (4 x 2+1) sur la longueur et au total 22 colonnes (9+4+9+4-4 ou 3+8+3+8).

  Si $n = 5$, il y a 11 colonnes (5 x 2+1) sur la longueur et au total 28 colonnes (11+5+11+5-4 ou 4+10+4+10).

  Si $n = 6$, il y a 13 colonnes (6 x 2+1) sur la longueur et au total 34 colonnes (13+6+13+6-4 ou 5+12+5+12).

  Si $n = 7$, il faudrait 40 colonnes, ce qui est impossible parce qu'il n'y en a que 35 à disposition.

  Ou remarquer que le nombre total de colonnes augmente de 6 quand le nombre de colonnes sur la largeur augmente de 1 (1 + 1 + 2 + 2 = 6) et trouver ainsi toutes les solutions possibles.

Niveaux : 4 - 5 - 6

Origine : Belluno

8. À LA FONTAINE (Cat. 4, 5, 6)

Deux amies, Laure et Pauline, vont chercher de l'eau avec un seau à la fontaine Eauclaire.

Leurs deux seaux contiennent ensemble 26 litres. Avec l'eau contenue dans le seau de Laure on peut remplir 3 fois le seau de Pauline et il reste encore 2 litres d'eau dans le seau de Laure.

Combien de litres contient le seau de Pauline ? Et celui de Laure ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre solution.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : les quatre opérations, multiples, fractions

Analyse de la tâche

- Comprendre que la contenance du seau de Laure, diminuée de 2 litres est trois fois celle du seau de Pauline.
- Comprendre que 26 l est la somme des contenances des deux seaux
- Chercher à obtenir 26 comme somme de trois nombres : l'un est le triple de l'autre et le 3e est 2, par essais et réajustements
- Enlever 2 à 26 et
  - chercher à obtenir 24 comme somme de deux nombres dont l'un est le triple de l'autre ;
  - ou comprendre que la contenance du seau de Pauline est le quart de 24 l, et déterminer cette contenance, c'est-à-dire 6 l, soit par essais additifs ou multiplicatifs, soit par reconnaissance du fait que le nombre qui, multiplié par 4 donne 24, est 6 ou par division.

Niveaux : 4 - 5 - 6

Origine : CRSEM – Cagliari

9. DRÔLE DE PIZZA (Cat. 5, 6)

Pour battre un record, les habitants d'un village décident de faire une très grande pizza de forme rectangulaire. Elle doit mesurer 4 m de long et être composée de quatre parties : une aux champignons, une au jambon, une aux olives et une au fromage. Pour tenir compte des goûts de chacun, les habitants décident que :

- la longueur de la partie au jambon doit être le double de celle aux champignons et la moitié de celle aux olives ;
- la longueur de la partie au fromage doit être le quart de celle de la partie la plus longue.

Quelle sera la longueur de chaque part ?

Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique : formulation d'hypothèses, raisonnement déductif
- Arithmétique : fractions

Analyse de la tâche

- Comprendre que la partie aux olives est la plus longue.
- Comprendre les différents rapports entre longueurs et les rapporter à la part la plus longue : L(j) = 1/2 L(o) ; L(c) = L(f) = 1/4 L(o) (les rapports peuvent aussi être exprimés par rapport à l'une des plus courtes comme celle aux olives ou aux fromages).
- En déduire que L(o) est égale à la moitié de la longueur totale (4 m), donc 2 m, puis les autres longueurs (1 m et 50 cm).
- Ou utiliser une représentation graphique pour représenter ces rapports.

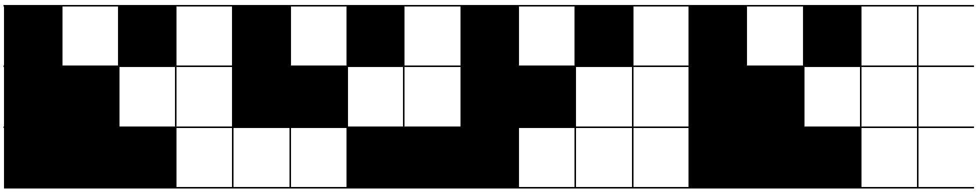
Niveau : 5 - 6

Origine : Parma

10. COLORIAGE BIZARRE (Cat. 5, 6, 7)

Maxime colorie un quadrillage en respectant, pour chaque ligne, une règle de coloriage différente :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16



Il a déjà colorié correctement les 15 premières colonnes. Il constate que les colonnes 1, 9 et 13 sont complètement coloriées. Il continue le coloriage en allant bien après la colonne 16.

La colonne 83 sera-t-elle entièrement coloriée ? Et la colonne 265 ?

Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique : formulation d'hypothèses, raisonnement déductif
- Arithmétique : division avec reste

Analyse de la tâche

- Repérer que la règle est déterminée par l'observation des lignes et non par celle des colonnes : 1ère ligne avec alternance 1 noire - 1 blanche, 2e ligne avec alternance 2 noires - 2 blanches, 3e ligne avec alternance 3 noires - 3 blanches.
- Repérer que
  - sur la ligne 1 : les colonnes impaires sont coloriées
  - sur la ligne 2 : les colonnes associées à un nombre dont le reste dans la division par 4 est 1 ou 2 sont coloriées
  - sur la ligne 3 : les colonnes associées à un nombre dont le reste dans la division par 6 est 1, 2 ou 3 sont coloriées
- En déduire que les colonnes complètement coloriées doivent vérifier les trois conditions ci-dessus.
- Chercher le reste dans la division par 2, 4 et 6 de chacun des nombres proposés
  - 83 donne pour reste 3 dans la division par 4, donc ne convient pas. (On pourrait le voir aussi par coloriage ou par l'écriture des trois suites de « nombres colorés »)
  - 265 donne toujours pour restes 1 dans les divisions par 2, 4 et 6 donc sera colorié 3 fois.
- Autre possibilité : repérer qu'une même « suite de colonnes coloriées » se répète toutes les 12 colonnes, diviser 83 et 265 par 12 : le coloriage des colonnes est le même que celui des colonnes correspondant aux restes obtenus (11 pour 83 et 1 pour 265). Seule la colonne 265 sera donc entièrement coloriée.
- Ou chercher une règle qui permet de retrouver des colonnes entièrement coloriées :

  $$1 \xrightarrow[+8]{} 9 \xrightarrow[+4]{} 13 \xrightarrow[+8]{} 21 \xrightarrow[+4]{} 25 \xrightarrow[+8]{}$$

  et vérifier qu'avec cette règle on arrive à 256 mais pas à 83.

Niveau : 5 - 6 - 7

Origine : Bourg-en-Bresse

11. LA FEUILLE DE TIMBRES (Cat. 6, 7, 8)

Jean est collectionneur de timbres. Il a devant lui une feuille rectangulaire de 24 timbres dont il a déjà détaché les bords blancs. Il a décidé de la partager avec les 23 camarades de sa classe.

Pour séparer les timbres sans les abîmer, un collectionneur commence toujours par plier fermement la feuille en suivant les lignes de dents avant de la séparer en deux parties. Puis ainsi de suite, il continue, toujours avec une seule partie à la fois, en la pliant et la séparant pour obtenir deux nouvelles parties.

Combien de plis, au minimum, Jean devra-t-il faire pour obtenir 24 timbres isolés ?

Expliquez votre raisonnement

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication et addition
- Géométrie : rectangle
- Topologie

Analyse de la tâche

- Dessiner un rectangle de 24 cases (timbres) et le partager par découpages effectifs ou par marquage des lignes de séparation, partie par partie. (Dans le cas où le rectangle n'est pas séparé effectivement, il faut éviter de séparer plusieurs parties à la fois par un même trait).
- Comprendre que le nombre de séparations est indépendant de leur disposition et qu'il en faut toujours 23 pour le rectangle donné parce qu'à chaque séparation l'on augmente de 1 le nombre des parties.
- Comprendre que ce nombre de coupes est aussi indépendant des dimensions du rectangle de 24 carrés (6 x 4, 8 x 3, 12 x 2 ou 24 x 1) et qu'il est toujours 23 pour autant que les règles soient respectées.
- Décrire la méthode par des schémas successifs et montrer que le nombre de plis/séparations est indépendant de leur ordre et des dimensions du rectangle.

Niveau : 6 - 7 - 8

Origine : Lodi, Suisse romande

12. VOYAGES (Cat. 6, 7, 8)

Paul, Jacques et Marie habitent dans trois villes de Transalpie, situées à égales distances de la capitale, Equalia. Ils se donnent rendez-vous à la gare d'Equalia, un jour à 11h00.

Chacun d'eux part le jour du rendez-vous à une heure sonnante (lorsque l'aiguille des minutes est sur le « 12 ») et arrive exactement à l'heure prévue, en utilisant un moyen de transport différent.

- Paul voyage à bicyclette, à la vitesse moyenne de 20 km/h.
- Jacques se déplace en train. à la vitesse moyenne de 60 km/h.
- Marie voyage en autobus, à la vitesse moyenne de 40 km/h.

À quelle heure chacun d'eux est-il parti et quelle distance a-t-il parcourue pour se rendre à Equalia ?

Justifiez vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiples et multiples communs

Analyse de la tâche

- Comprendre que la distance d'Equalie aux trois villes doit être multiple de 20, de 40, de 60 (en km) et par conséquent de 120 ou un de ses multiples (en km) ;

  s'il s'agit de 120 km, alors Paul a voyagé 6 heures (120 : 20), et est donc parti à 5 h du matin, Jacques a voyagé 2 h (120 : 60), et est parti à 9 h, et Marie a voyagé 3 h (120 : 40), et est partie à 8 h du matin.
- La distance ne peut être 240 km, ni un autre multiple commun de 120 car certains auraient dû partir la veille.
- La distance est donc de 120 km, Paul est parti à 5 h, Jacques à 9 h et Marie à 8 h.

Niveaux : 6 - 7 - 8

Origine : Belluno

13. CHIFFRES ÉGAUX (Cat. 7, 8)

Richard découvre que lorsqu'il multiplie 12345679 par 0,45 il obtient un nombre qui ne s'écrit qu'avec neuf chiffres 5, et une virgule.

Intrigué, il se demande s'il peut trouver des nombres qui, lorsqu'il les multiplie par 12345679, ne s'écrivent qu'avec neuf chiffres 7 et une virgule éventuellement.

Richard pourra-t-il y arriver ? De combien de manières ?

Écrivez les nombres que vous avez trouvés et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : chiffre et nombre, multiplication et division, nombres décimaux
- Logique : organisation d'une recherche

Analyse de la tâche

- Vérifier qu'en multipliant 12345679 par 0,45 on obtient le nombre 5555555,55 composé de neuf chiffres 5.
- Observer qu'on obtient un nombre formé de neuf “5” aussi avec les multiplications suivantes :
  12345679 x 45 = 555555555
  12345679 x 4,5 = 55555555,5
  12345679 x 0.045 = 555555,555
  12345679 x 0,0045 = 55555,5555
  ....
  12345679 x 0,00000045 = 5,55555555 et qu'il n'y en a pas d'autres.
- Remarquer que, quelle que soit la position de la virgule, les nombres formés uniquement de neuf chiffres 7 sont les 7/5 des nombres formés uniquement de neuf chiffres 5. Le facteur multiplicatif de 12345679 doit donc, lui aussi, être les 7/5 de celui du facteur correspondant. Le facteur correspondant à 45 est 7/5 x 45 = 7 x 9 = 63.
- Selon ce qui a été observé précédemment, en déduire qu'il y a neuf solutions possibles : 63 ; 6,3 ; 0,63 ; 0,063 ; 0,0063 ; 0,00063 ; 0,000063 ; 0,0000063 ; 0,00000063.

Ou :

- Se rendre compte que pour obtenir 7 comme chiffre des unités dans le nombre cherché, il faut multiplier le nombre 12345679 par un nombre avec 3 comme chiffres des unités ; d'après l'algorithme de la multiplication, on voit que le nombre cherché ne peut se limiter à ....3 (car 12345679 x 3 = 37037037) mais doit aussi avoir 6 comme chiffre des dizaines (6 x 9 = 54 et, avec la retenue, 3 + 4 = 7) :

$$\begin{array}{ccccccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & \\
 & & & & & & & ? & 3 & \times \\
\hline
 & 3 & 7 & 0 & 3 & 7 & 0 & 3 & 7 & \\
? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & 4 & & = \\
\hline
7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 &
\end{array}$$

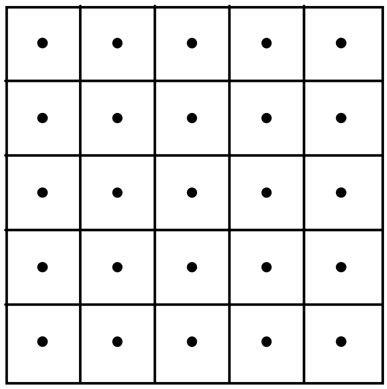
- Vérifier que 12345679 x 63 = 777777777 et trouver les 8 autres solutions.

Degrés : 7 - 8

Origine : Riva du Garda

14. COMBIEN DE DISTANCES ? (Cat. 7, 8)

Un pépiniériste a planté des arbres très régulièrement sur un terrain de forme carrée, comme le montre ce dessin.



Son fils, qui a l'esprit mathématique, remarque que la distance entre deux arbres n'est pas toujours la même. Il lui pose alors cette question : *« Combien existe-t-il de distances différentes entre deux arbres de ta plantation ? »*

Répondez vous aussi à cette question.

Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique : stratégie de recherche et de dénombrement des différentes distances
- Géométrie : isométrie, dispositions relatives, distance

Analyse de la tâche :

- Voir que la distance la plus longue est celle qui relie deux "points opposés" du grand carré.
- Comprendre que, sur une ligne de points (horizontale, verticale ou oblique), on peut trouver plusieurs paires de - points équidistants entre eux.
- En déduire qu'on peut se contenter de mesurer les distances entre un point situé dans un angle du grand carré et les autres points.
- Repérer que, du fait de la symétrie par rapport à une diagonale, on peut ne s'intéresser qu'à 15 points (Fig. 1)

Fig 1

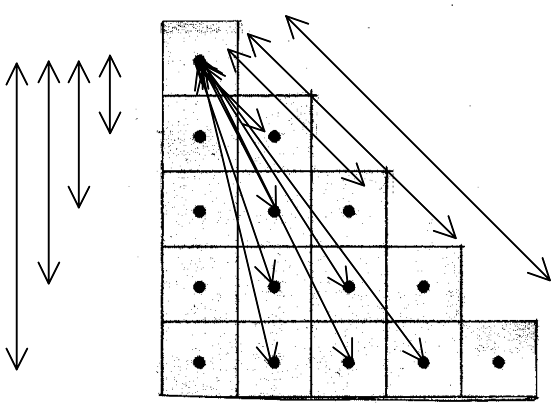
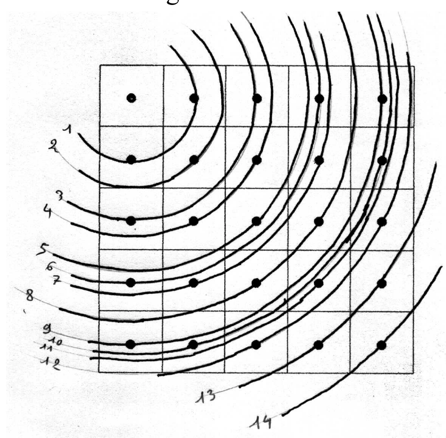


Fig 2



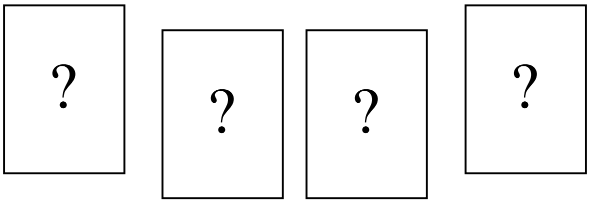
- Ou utiliser le compas pour comparer des distances (Fig 2)
- Conclure qu'il y a 14 distances différentes

Niveau : 7 - 8

Origine : Bourg-en-Bresse

15. JEU DE CARTES (Cat. 7, 8)

Luc et ses amis jouent avec un jeu de 52 cartes, composé de quatre séries de cartes numérotées de 1 à 13. À ce jeu, on retourne quatre cartes, faces visibles et l'on forme un « talon » avec les autres, faces cachées.



À tour de rôle, chaque joueur tire la carte supérieure du talon et, lorsque c'est possible, prend les cartes retournées dont la somme correspond au nombre de la carte tirée.

Par exemple, si on tire un « 8 », on peut prendre un « 8 » retourné ou deux, trois ou quatre cartes retournées dont la somme est 8.

C'est à Luc de jouer. Il observe les quatre cartes retournées et dit, avant de tirer la carte supérieure du talon : « J'ai de la chance, je suis sûr de pouvoir prendre au moins une des cartes retournées ! »

Quels peuvent être les nombres écrits sur les quatre cartes retournées ?

Expliquez comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, puissances
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Comprendre que les quatre nombres doivent être tous différents et inférieurs ou égaux à 13, et qu'ils peuvent former toutes les sommes différentes de 1 à 13.
- Se rendre compte que le 1 et le 2 devront nécessairement faire partie des quatre nombres (ils ne peuvent être obtenus comme somme des autres) et que les nombres trop élevés comme 12 et 13 doivent être exclus.
- Procéder par essais en se rendant compte que le troisième nombre doit être le 3 ou le 4 ; dans le premier cas on obtient la solution 1- 2 - 3 - 7 ; dans le second cas on obtient l'une des trois possibilités 1 - 2 - 4 - 6, 1 - 2 - 4 - 7 et 1 - 2 - 4 - 8.

  La solution 1, 2, 4, 8, et seulement celle-la, peut être obtenue par l'une des stratégies qui suit :
- Procéder par essais en partant de 1 et en excluant les sommes qu'on peut obtenir avec les nombres déjà retenus : 2 l'est, 3 ne l'est pas car 3 = 1 + 2, 4 est retenu, 5, 6 et 7 ne le sont pas (ils s'obtiennent à l'aide des nombres précédents par les sommes : 4 + 1, 4 + 2 et 4 + 1 + 2), 8 est retenu et permet, à l'aide des nombres précédents, d'obtenir toutes les sommes de 9 à 13.
- Ou, observer que chaque nombre pair est la somme de puissances de 2, et retenir ainsi 2, 2^2, 2^3 et le nombre 1 qui permettra d'obtenir tous les nombres impairs.

Origine : Parma

Niveaux : 7 - 8

16. CHIFFRES MOBILES (Cat. 7, 8)

Un nombre est composé de quatre chiffres tous différents et différents de 0.

En mettant le chiffre des unités à la place de celui des milliers, celui des dizaines à la place de celui des centaines, celui des centaines à la place de celui des unités et celui des milliers à la place de celui des dizaines on obtient un nouveau nombre qui, additionné au nombre de départ, donne 9613.

Quels sont les nombres de quatre chiffres qui satisfont ces conditions ?

Expliquez comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique :opérations, chiffre et nombre
- Logique

Analyse de la tache

- Représenter la situation par un schéma, comme le suivant :

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d\ + \\ \underline{d} & \underline{c} & \underline{a} & \underline{b\ =} \\ 9 & 6 & 1 & 3 \end{array}$$

- Se rendre compte que, puisque le nombre qui représente la somme se termine par 3, le premier et le deuxième nombre doivent avoir comme chiffres des unités 1-2, 2-1, 5-8, 8-5, 6-7, 7-6, 9-4, 4-9.
- Se rendre compte que les couples 4-9, 9-4 et 8-5 conduisent à une impasse.
- Trouver qu'en posant d = 1 et b = 2 on a la solution 8231 ; en posant d = 2 et b = 1 on a la solution 7142 ; en posant d = 5 et b = 8 on a la solution 3875 ; en posant d = 6 et b = 7 on trouve la solution 2786 ; enfin si d = 7 et b = 6 on arrive à la solution 1697.

Niveaux : 7 - 8

Origine : Siena

17. GÂTEAUX : GROS OU PETITS ? (Cat. 8)

Chaque dimanche, Mme Boulanger prépare sa pâte et en remplit à ras-bords un moule cylindrique. Une fois cuit, ça lui donne un excellent gâteau.

Mais aujourd'hui, avec la même quantité de pâte, elle fait plusieurs petits gâteaux au lieu d'un seul grand gâteau, en utilisant des moules dont le diamètre et la hauteur sont la moitié de celui qu'elle utilise habituellement.

Combien de petits gâteaux obtiendra-t-elle avec la même quantité de pâte ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

- Géométrie : volume du cylindre
- Arithmétique : rapports
- Algèbre : calcul littéral

Analyse de la tâche

- Comprendre que les moules correspondent à des cylindres de volumes différents et que la somme des volumes des petits cylindres(V1) doit être égale au volume du grand cylindre(V2)
- Comprendre que le rapport V1/V2 correspond à 1/8, vu que l'aire de base du petit cylindre correspond au 1/4 de celle du grand cylindre et la hauteur correspond à la moitié.
- Déduire qu'il faut 8 petits cylindres pour obtenir le volume correspondant à 1 grand cylindre.

Ou bien :

- Indiquer par « r » et « h » le rayon et la hauteur du grand cylindre et par « r/2 » et « h/2 » le rayon et la hauteur des petits cylindres.
- Calculer les volumes des deux cylindres et déduire que 8 petits cylindres correspondent à un grand.

Ou encore :

- Émettre des conjectures et les soumettre à un contrôle, en attribuant des valeurs aux dimensions des moules (par exemple : 20 et 10 pour les rayons, 12 et 6 pour les hauteurs).

Niveau : 8

Origine : Parma