Table des matières

1. TU JOUES AVEC MOI ? (Cat. 3)

Thomas va chez François pour jouer aux billes.
Thomas a 27 billes. Lors de la première partie, il en gagne 15.
Après la deuxième partie, sa mère lui téléphone et lui demande de rentrer tout de suite à la maison.
Thomas compte alors ses billes. Il en a 51.

Thomas a-t-il perdu ou gagné des billes lors de la deuxième partie ? et combien ?
Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique: addition, soustraction

Analyse de la tâche

- Examiner le cas de la première partie : percevoir l'état initial (27) puis le gain (15) et en tirer le nombre des billes de Thomas à la fin de la première partie par une addition : 27+15=42
- Passer à la deuxième partie et se rendre compte que l'état initial est 42 et l'état final est 51. En comparant ces nombres en déduire que Thomas a gagné des billes lors de la deuxième partie et en calculer le nombre par une addition du genre 42 + ... = 51 ou par une soustraction 51 - 42 = ... qui donne 9 billes gagnées.
- Ou considérer l'ensemble des deux parties : l'état initial est 27, l'état final est 51, en déduire qu'il y a un gain total de 24 billes, (qui se calcule par 27 + ... = 51 ou 51 - 27 = ...), et finalement considérer les gains de 15 de la première partie et de 24 pour l'ensemble et en déduire qu'il y a un gain de 9 lors de la deuxième partie par une opération avec des nombres qui représentent des transformations : (+ 15) + ... = (+ 24) ou (+24) - (+15) = ...

Niveau : 3
Origine : Parma

2. COURSE D'OBSTACLES (Cat. 3, 4)

Mario s'est inscrit à une course d'obstacles qui se déroulera dimanche.
Le premier jour d'entraînement, il a saute un nombre impair d'obstacles.
Le lendemain, il saute le double du nombre d'obstacles du premier jour. Et ainsi de suite, il s'entraîne chaque jour en sautant à chaque fois le double du nombre d'obstacles sautés le jour précédent.
Lors du dernier entraînement, le jour avant la course, il saute 80 obstacles.

Quel jour de la semaine a-t-il commencé à s'entraîner ?
Combien d'obstacles a-t-il sautés ce premier jour d'entraînement ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI
Domaine de connaissances
- Arithmétique : division par deux
- Mesure : temps, en jours

Analyse de la tâche
- Comprendre que si la course a lieu un dimanche, le jour du dernier entraînement est un samedi.
- Prendre la moitié de 80 pour déterminer que vendredi il a sauté 40 obstacles, la moitié de 40 pour déterminer que jeudi il a sauté 20 obstacles, et ainsi de suite, jusqu'au mardi où il a sauté 5 obstacles.
- Comprendre que, puisque le nombre d'obstacle est impair le mardi, c'est ce jour qu'il a commencé à s'entraîner. Il s'agit alors de remarquer que la moitié de 5 est un nombre non naturel, incompatible avec la contrainte implicite que le nombre d'obstacles doit être naturel.

Niveaux : 3 - 4
Origine : Riva del Garda

3. LE COUVRE-LIT DE GRAND-MERE (Cat. 3, 4)

Grand-Mère a cousu un couvre-lit rectangulaire formé de carrés de même taille.
Il y a 22 carrés dans la longueur et 15 carrés dans la largeur.
Grand-Mère a placé un rang de carrés bleus sur tout le bord du couvre-lit, et a fait tout l'intérieur avec des carrés rouges.

Combien y a-t-il de carrés rouges dans le couvre-lit de Grand-Mère ?
Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations
- Géométrie : rectangle, aire

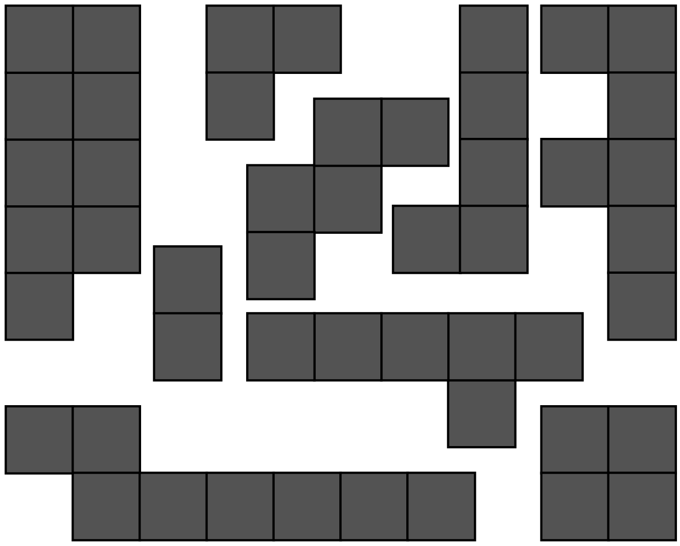
Analyse de la tâche

- Dessiner correctement, sur papier quadrillé, le couvre-lit de Grand-Mère, c'est-à-dire un rectangle de 15 carrés de largeur et de 22 carrés de longueur.
- Compter un à un les carrés rouges sur le dessin et arriver à 260.
- Ou: comprendre que le nombre total des carrés du couvre-lit est donné par 22 x 15 = 330 (il y a 15 bandes, chacune de 22 carrés) alors que le nombre total des carrés bleus est donné par: (22 x 2) + (15 x 2) - 4 = 70 (il ne faut pas considérer deux fois les carrés de l'intersection des bandes). Il s'ensuit que le nombre des carrés rouges est 330 - 70 = 260.
- Ou comprendre que les carrés rouges forment un rectangle de 20 par 13, donc 13 x 20 = 260.

Niveaux : 3 - 4
Origine : Siena

4. PUZZLES CARRÉS (Cat. 3, 4, 5)

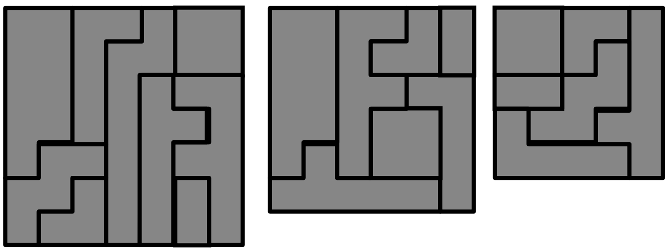
Voici 9 pièces pour construire des puzzles carrés.
Celle du bas, à droite, est déjà un carré, de 2 carreaux sur chaque côté.
En utilisant plusieurs de ces pièces, essayez de former un puzzle carré de 3 carreaux de côté.
Puis recommencez en essayant de former un puzzle carré de 4 carreaux de côté.
Puis recommencez en essayant de former un carré de 5 carreaux de côté.
Puis un de 6, et ainsi de suite.



(On ne peut pas utiliser deux fois la même pièce dans un même puzzle.)
Dessinez les puzzles carrés que vous avez pu former.

ANALYSE A PRIORI
Domaine de connaissances
- Géométrie

Analyse de la tâche
- Découper les pièces ou les reproduire.
- Chercher à construire les puzzles demandés par manipulation des pièces, éventuellement après avoir vérifié numériquement que la solution est possible.
- Se rendre compte qu'il n'est pas possible de construire le carré 3 x 3 (si on part du carré 2 x 2 on ne peut le compléter par les pièces à disposition ou, en cherchant des pièces dont la somme des aires est 9, on n'en trouve pas qui permettent de réaliser un carré de 3 x 3). Pour le carré de 4 x 4, il n'y a que les cinq « plus petites » pièces qui conviennent, dont la somme des aires est 19 (en carreaux).Il faudrait donc ne pas utiliser celle de 3 carreaux et on constate après quelques essais que la construction n'est pas possible.
- Dessiner une solution pour, 5 x 5 et 6 x 6 et 7 x 7, par exemple :



Niveaux : 3 - 4 - 5
Origine : C.I. développement du problème 1 de la finale du 10eRMT

5. À TABLE, AVEC MARTHE ET SES AMIS (Cat. 3, 4, 5)

Marthe a invité pour son anniversaire ses meilleurs amis: Anne, Lucie, Georges, Aldo, Angélique, Gabriel et Martin.
Ils se mettent à table pour manger la tourte et se placent de la manière suivante :
- chaque enfant est assis en face d'un autre enfant,
- Marthe et Angélique se mettent aux deux bouts de la table,
- Georges est à la gauche de Marthe,
- les prénoms de deux enfants assis l'un à côté de l'autre ne commencent jamais par la même lettre,
- chaque garçon est placé entre deux filles.

De combien de manières peuvent se placer Marthe et ses amis ?
Représentez par un dessin toutes les manières de placer les enfants que vous avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI
Domaine de connaissances
- Géométrie : positions relatives

Analyse de la tâche
- Comprendre que la table est rectangulaire et placer Marthe et Angélique aux deux bouts.
- Comprendre que sur chaque long côté de la table il y a de la place pour trois enfants, Georges, est déjà placé à gauche de Marthe. Tenir compte que les garçons et les filles doivent être alternés.
- Comprendre que Aldo ne peut être qu'à la droite de Marthe (car il ne peut être à côté de Angélique) et il n'y a que Lucie qui peut être assise à côté de lui (Anne ne peut y être).
- Placer Martin ou Gabriel (2 possibilités) à côté de Lucie. puis compléter l'autre côté avec les enfants qui restent :

	Georges	Anne	Gabriel	
Marthe				Angélique
	Aldo	Lucie	Martin	

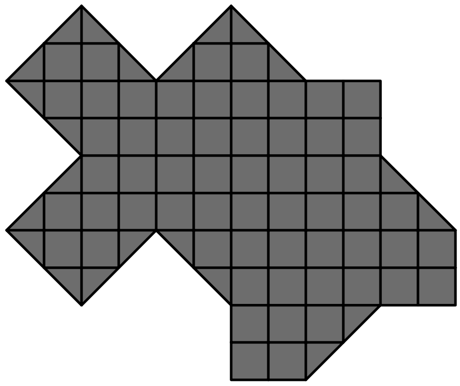
	Georges	Anne	Martin	
Marthe				Angélique
	Aldo	Lucie	Gabriel	

Niveaux : 3 - 4 - 5
Origine : Parma

6. DÉCOUPAGE (Cat. 4, 5)

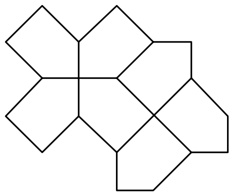
Catherine souhaite partager entièrement cette figure en 7 morceaux égaux.
Tous les morceaux doivent être égaux, de la même grandeur et de la même forme.

Montrez où il faudrait découper la figure.
Expliquez comment vous avez trouvé votre découpage.



ANALYSE A PRIORI
Domaine de connaissances
- Géométrie: partage d'une figure en parties isométriques
- Arithmétique (en cas de procédure par comptage et division par 7): division

Analyse de la tâche
- Comprendre que la figure doit être partagée en 7 parties « égales » (isométriques).
- Procéder par essais de manière qu'il ne reste pas de carte inutilisée
  ou, avant de commencer le partage de la figure, calculer son aire en comptant les carrés et en la divisant par sept pour découvrir le nombre de carrés de chacune des parties égales.



Niveaux : 4 - 5
Origine : Udine

7. L'ÉNIGME DE MERLIN L'ENCHANTEUR (Cat. 4, 5, 6)

Merlin l'enchanteur désire mettre à l'épreuve les compétences mathématiques du petit Semola, le futur roi Arthur.
Il lui propose l'énigme suivante :
Le serrurier de notre village a trois fils.
Lorsqu'on additionne les trois âges de ces fils, on obtient 13 mais lorsqu'on les multiplie on obtient 36. Le plus âgé des fils aide déjà son père à l'atelier.
Quel est l'âge de chacun des fils du serrurier ?
Après avoir bien réfléchi, Semola donne sa réponse.
Merlin l'enchanteur est très satisfait. Semola a vraiment trouvé la bonne solution !

Résolvez vous aussi l'énigme de Merlin et justifiez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI
Domaine de connaissances
- Arithmétique : addition et multiplication; diviseurs
- Combinatoire : organisation des données

Analyse de la tâche
- Comprendre qu'il s'agit de rechercher tous le triplets de nombres dont le produit est 36 ou tous les triplets dont la somme est 13.
- Procéder de manière systématique, par exemple, à partir de la décomposition multiplicative de 36, et trouver les triplets suivants: (1,1,36), (1,2,18), (1,3,12), (1,4,9), (1,6,6), (2,2,9), (2,3,6), (3,3,4) et éliminer ceux dont la somme est différente de 13 pour ne conserver que (1, 6, 6) e (2,2,9).
- En conclure que le triplet qui détermine l'âge des fils du serrurier est (2,2,9) à cause de la dernière information faisant état de l'existence d'un fils aîné.
- Ou en commençant par les sommes, déterminer de manière systématique les triplets dont la somme est 13 : (1,1,11), (1,2,10), (1,3,9), (1,4,8), (1,5,7), (1,6,6), (2,2,9), (2,3,8), (2,4,7), (2,5,6), (3,3,7), (3,4,6), (3,5,5), (4,4,5) et éliminer ceux dont le produit est différent de 36 pour ne conserver également que (1, 6, 6) e (2,2,9) et aboutir à la même conclusion que précédemment.
- Rechercher au hasard des triplets de nombres et trouver les âges de 2, 2 et 9, sans pouvoir certifier que c'est la seule solution.

Niveaux : 4 - 5 - 6
Origine : Siena

8. LA PARTIE DE DÉS (Cat. 5, 6)

Pauline et Jimmy jouent aux dés. Pour chaque partie chacun lance son dé une seule fois.
Celui qui obtient le nombre le plus grand gagne la partie. (En cas d'égalité, on recommence.)
Ils font 5 parties. Pauline gagne 3 fois et Jimmy 2 fois. Et, chose étrange, lors de chacune des cinq parties, le dé de l'un des deux joueurs a montré « 1 ».
Mais Jimmy remarque que la somme de tous les nombres qu'il a obtenus vaut 6 de plus que la somme de tous les nombres obtenus par Pauline.

Indiquez les nombres que les deux enfants peuvent avoir obtenus dans les 5 parties.
Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI
Domaine de connaissances
- Arithmétique : addition, soustraction
- Combinatoire : dresser un inventaire précis des combinaisons possibles

Analyse de la tâche
- Comprendre, selon les contraintes du problème (3 parties gagnées pour Pauline, 2 pour Jimmy et écart de 6 points entre les totaux) que le gain de chaque partie se fait par comparaison directe des deux nombres de points tirés mais qu'il faut conserver une mémoire de chaque partie (les points de chacun ou, au moins les écarts de chaque partie) pour déterminer l'écart total sur les cinq parties, par additions et soustractions.
- Se persuader ensuite que les écarts en faveur de Jimmy doivent être sensiblement plus grands que ceux des parties où Pauline gagne, ou faire des essais pour se convaincre que Jimmy doit gagner avec les plus grands écarts possibles, de 5 (le maximum) ou de 4, et perdre avec des écarts petits, de 1 (le minimum) ou de 2.
- Trouver les différentes possibilités :
  si les écarts en faveur de Jimmy sont 5 et 5 les écarts en faveur de Pauline sont 1, 1 et 2 et on a alors des scores de 6 - 1, 6 - 1 contre, par exemple (1 - 2), (1 - 3) et (1 - 2)
  si les écarts en faveur de Jimmy sont 5 et 4 les écarts en faveur de Pauline sont 1, 1 et 1 et on obtient les scores de (6 - 1) et (5 - 1) contre les trois écarts de 1 : (2 - 1), (2 - 1), (2 - 1)
- Ou établir un tableau dans lequel le total de la première colonne doit être 9 ou 8 et celui de la deuxième, respectivement 15 ou 14 et en déduire les points manquants :

Pauline	Jimmy
	1
	1
	1
1	
1	

Niveaux : 5 - 6
Origine : Bourg-en-Bresse

9. L'ALBUM DE PHOTOS (Cat. 5, 6)

Elise a placé dans un album les photos prises durant ses vacances.
Il y a 80 photos et Elise les a disposées sur 29 pages: dans certaines pages, elle a mis 4 photos et dans d'autres 2 photos.

Combien y a-t-il de pages avec 4 photos et combien avec 2 photos dans l'album d'Elise ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication, soustraction, division
- Logique: formulation d'hypothèses, raisonnement déductif, approche algébrique

Analyse de la tâche

- Comprendre que toutes les pages doivent contenir au moins 2 photos (ce qui fait qu'il y a au moins 58 = 2 x 29 photos).
- Comprendre qu'il faut retirer du nombre total des photos le nombre (58) de celles utilisées pour remplir les 29 pages avec 2 photos (80 – 58 = 22) pour trouver le reste, qui, divisé par 2 donnera le nombre (11) de pages avec 4 photos.
  En déduire que le nombre de pages avec 2 photos est 18 (29 – 11 = 18).
- Ou déterminer des nombres cherchés par essais (simple liste des essais successifs, essais progressifs en forme de tableau, ... jusqu'à une préfiguration de l'équation « adulte » $4x + 2(29 - 4x) = 80$).

Niveaux : 5 - 6
Origine : Parma

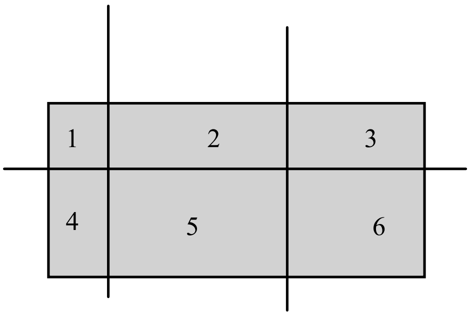
10. DES RECTANGLES, ENCORE DES RECTANGLES (Cat. 5, 6, 7)

Tracez 3 droites qui coupent un rectangle, de façon à former le maximum de nouveaux rectangles.

Dessinez votre rectangle et les trois droites.
Combien de rectangles peut-on voir en tout dans votre figure ?
Indiquez-les avec précision.

ANALYSE A PRIORI
Domaine de connaissances
- Géométrie : rectangles
- Combinatoire : organisation d'un inventaire exhaustif

Analyse de la tâche
- Comprendre qu'il faut partir d'un rectangle quelconque et en dessiner un.
- Comprendre que les trois droites doivent être parallèles à un côté ou à l'autre du rectangle initial.
- Comprendre aussi que les droites ne doivent pas être toutes parallèles entre elles, parce que dans ce cas on n'obtient pas le maximum de rectangles.
- Dessiner deux droites parallèles à la longueur et l'autre à la largeur du rectangle - ou, respectivement, à la largeur et à la longueur - et se rendre compte que les deux possibilités sont équivalentes (donnent le même nombre de rectangles).
- Déterminer les différentes catégories de rectangles et dénombrer les rectangles de chacune d'entre elles :

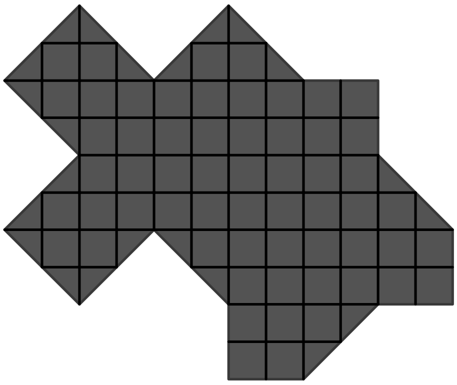


les 18 rectangles :
seuls: 1, 2; 3; 4; 5 et 6;
par deux: 1-2; 2-3; 4-5; 5-6; 1-4; 2-5 et 3-6;
par trois: 1-2-3 et 4-5-6:
par quatre:1-2-4-5 et 2-3-5-6,
l'ensemble :1-2-3-4-5-6.

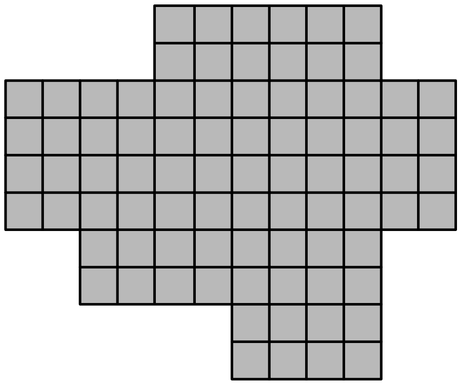
Niveaux : 5 - 6 - 7
Origine : Bourg-en-Bresse

11. LES CARTES DE COULEUR (Cat. 6, 7)

Une classe de 21 élèves est divisée en groupes de trois élèves.
Pour réaliser un collage chaque groupe doit recevoir un morceau de la carte rouge et un morceau de la carte bleue.



carte rouge



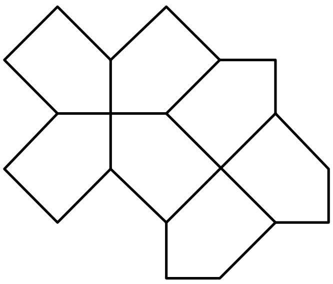
carte bleue

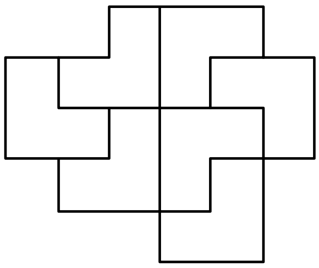
Mais attention:
- les deux cartes doivent être utilisées complètement,
- les morceaux d'une même couleur doivent être tous égaux (de même forme et de même grandeur).

Comment faut-il découper les cartes ?
Expliquez comment vous avez pu effectuer les découpages.

ANALYSE A PRIORI
Domaine de connaissances
- Géométrie: partage d'une figure en parties isométriques
- Arithmétique : division

Analyse de la tâche
- Comprendre que chaque figure doit être partagée en 7 parties « égales » (isométriques).
- Procéder par essais de manière qu'il ne reste pas de carte inutilisée.
  ou, avant de commencer le partage de chaque figure, calculer son aire en comptant les carrés et en la divisant par sept pour découvrir il nombre de carrés de chacune des parties égales.





Niveaux : 6 - 7
Origine : Udine

12. QUATRE À QUATRE (Cat. 6, 7, 8)

En utilisant exactement quatre fois le nombre "4", et en combinant ces quatre nombres avec les opérations arithmétiques (« + », «- », « x » ou « : » et en utilisant éventuellement des parenthèses) on peut former de nombreux nombres naturels.

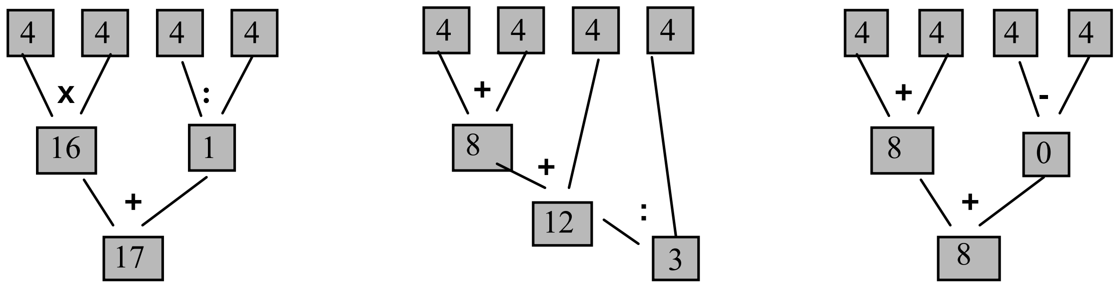
Combien de nombres naturels impairs différents pouvez-vous former de cette façon ?
Indiquez-les tous, clairement, comme dans les exemples suivants :

Exemples :

(4 x 4) + (4 : 4) = 16 + 1 = 17 (4 + 4 + 4) : 4 = 12 : 4 = 3 (4 + 4) + (4 – 4) = 8 + 0 = 8

ce dernier exemple ne convient pas car il donne un nombre pair!

ou, sans utiliser de parenthèses :



ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : les quatre opérations et leurs combinaisons
- Logique et raisonnement : organisation systématique d'un inventaire

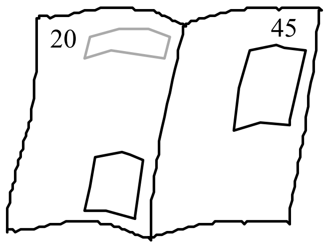
Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut utiliser exactement quatre nombres, exclure les combinaisons de chiffres comme 44, 444, ... et se rendre compte qu'en modifiant les opérations et leur ordre on peut exprimer des nombres très différents.
- Rechercher des nombres au hasard ou prendre successivement chaque nombre naturel impair et voir si on peut l'obtenir selon les consignes données.
- Rechercher une méthode systématique.
  Par exemple, en commençant par deux nombres « 4 », on obtient 0, 1, 8 ou 16 :
  4 - 4 = *0* 4 : 4 = *1* 4 + 4 = *8* 4 x 4 = *16*
  puis en les combinant deux à deux on peut obtenir, en quatre « 4 », les nombres naturels impairs suivants,
  1 + *0* = **1** *8* - *1* = **7** *8* + *1* = **9** *16* - *1* = **15** *16* + *1* = **17**
  puis avec trois « 4 », on peut former 3, 5, 12 et 20 avec lesquels on pourra obtenir des nombres impairs par addition de 4 ou division par 4 :
  4 - 4 : 4 = *3* 4 + 4 : 4 = *5* 4 + 4 + 4 = *12* 4 x 4 + 4 = *20* dont les deux derniers conduisent à de nouveaux nombres impairs : *12* : 4 = **3** et *20* : 4 = **5**

Niveaux : 6 - 7 - 8
Origine : Ticino

13. UN QUOTIDIEN (Cat. 6, 7, 8)

Dans un quotidien formé d'un seul cahier, dans lequel 11 pages sont consacrées au sport, les pages 20 et 45 se trouvent sur la même face d'une feuille.



Combien ce quotidien a-t-il de pages ?
Justifiez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI
Domaine de connaissances
- Géométrie : positions relatives dans l'espace
- Arithmétique : addition et soustraction

Analyse de la tâche
- Découvrir que les 11 pages consacrées au sport n'ont pas d'influence sur la solution du problème.
- Observer, sur un journal ouvert ou sur un modèle, les paginations des feuilles lorsqu'elles sont séparées : (pages impaires à droite, « sauts » de 2 en 2 d'une feuille à l'autre, ...). En déduire que le recto de la feuille « 20 et 45 » est suivi du recto des feuilles « 18 et 47 »; « 16 et 49 », « 14 et 51 », ... jusqu'à « 2 et 63 ».
  Découvrir qu'au verso de cette dernière feuille on a les pages 1 et 64 et que, par conséquent, le quotidien a 64 pages.
- Ou découvrir, toujours par des observations, que dans un quotidien ou une revue, la somme des deux numéros de page disposés sur le même côté d'une feuille est constante et vaut un de plus que le nombre de pages de la revue. Dans le cas présent : 20 + 45 – 1 = 64.
- Ou calculer le nombre des pages intérieures qui précèdent la feuille indiquée, de 21 à 44, c'est-à-dire 24 pages, et calculer le nombre des autres pages, jusqu'à 20 y compris et dès 45 y compris, c'est-à-dire 40 = 20 x 2 et finalement faire la somme pour arriver au nombre total de pages : 24 + 40 = 64.
- Ou observer qu'il y a 19 pages qui précèdent la page 20 et, par conséquent, 19 pages aussi qui suivent la page 45 et donc que le nombre total des pages du journal est 45 + 19 = 64.

Niveaux : 6 - 7 - 8
Origine : Ticino

14. LE NOMBRE AMPUTÉ (Cat. 7, 8)

Dans un jeu mathématique, on présente aux candidats le nombre suivant :

123456789101112131415161718192021…394041424344454647484950

On leur demande de biffer 70 chiffres de ce nombre de manière à obtenir le nombre amputé le plus grand possible avec les chiffres qui restent, sans modifier leur ordre.
Parmi tous les candidats, la petite Génia est la seule à trouver ce nombre.

Ecrivez entièrement ce nombre amputé et expliquez comment Génia a fait pour le trouver.

ANALYSE A PRIORI
Domaine de connaissances
- Arithmétique : numération et comparaison

Analyse de la tâche
- Observer le nombre donné et comprendre qu'il a 9 + (41 x 2) = 91 chiffres ou l'écrire complètement. Comprendre ensuite que le problème consiste à choisir les 70 chiffres à biffer, pour n'en conserver que 21.
- Se rendre compte que, parmi les nombres de 21 chiffres, le plus grand est composé de chiffres « 9 » uniquement, mais que, dans le cas présent, il faut se contenter de celui qui a le plus grand nombre possible de chiffres « 9 » au début.
- Comprendre alors qu'il faut biffer successivement les 8 premiers chiffres, laisser le « 9 », biffer la suite des chiffres « 10111213...1617181 » (il y en a 19) et conserver le « 9 » (de « 19 ») épargner le 9, biffer la suite des chiffres « 2021222324...27282 » (il y en a de nouveau 19) et conserver le « 9 » (de « 29 »), etc.
- Calculer que, en atteignant le « 9 » de « 39 », on a déjà biffé 8 + (3 x 19) = 65 chiffres et qu'il n'en reste plus que 5 à biffer, ce qui ne permet pas d'aller jusqu'au « 9 » de « 49 ». Il reste maintenant le nombre 9999404142434445...
- Comprendre que Génia a trouvé sa solution en biffant encore les quatre chiffres « 0 », « 1 », « 2 », « 3 » - dont la valeur est inférieure à 4 - qui apparaissent après la séquence « 9999 » et l'un des chiffres « 4 » qui se présente après cette séquence.
- Noter le nombre amputé le plus grand possible : 999944444454647484950.

Niveaux : 7 – 8
Origine : Luxembourg

15. LES VACANCES (Cat. 7, 8)

Lors des dernières vacances d'été, les deux frères Dumont, les deux frères Dubois et les deux frères Dupré sont allés à l'étranger : trois d'entre eux sont allés en Grèce, deux en Angleterre et un en Allemagne.
Un de leurs amis dit : « Les frères Dumont sont allés en Angleterre et les frères Dubois en Grèce ».
Un autre dit: « L'un des frères Dumont est allé en Allemagne, les frères Dubois sont allés en Angleterre ».
Un troisième dit : « Les deux frères Dumont sont allés en Grèce et, en ce qui concerne les frères Dupré, l'un est allé en Angleterre et l'autre en Grèce ».
On sait que, pour chacun de ces trois amis, l'une de ses affirmations est vraie et l'autre est fausse.

Où les frères Dumont sont-ils allés en vacances ?
Expliquez votre raisonnement.

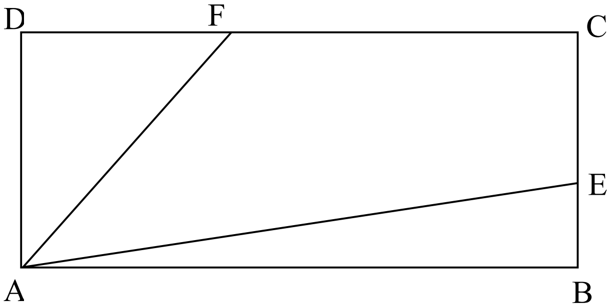
ANALYSE A PRIORI
Domaine de connaissances
- Logique

Analyse de la tâche
- Analyser chacune des phrases sachant qu'une donnée est exacte et l'autre fausse. Si on suppose que dans la première phrase, la première information est exacte, sur les frères Dumont, la seconde est fausse, sur les frères Dubois. L'hypothèse serait alors : « Les Dumont sont allée en Angleterre, les Dubois ne sont pas allés en Grèce ». Dans ce cas, les informations de la seconde phrase seraient les deux fausses, parce qu'un des Dumont ne pourrait être allé en Allemagne et les deux Dubois en Angleterre.
  Il faut donc changer d'hypothèse dans la première phrase et considérer comme vraie l'information sur les frères Dubois (les deux en Grèce) et fausse celle sur les frères Dumont. Dans la deuxième phrase, l'information sur les Dubois est donc fausse et celle disant qu'un des frères Dumont est allé en Allemagne est vraie.
  Dans la troisième phrase, l'information sur les frères Dumont est alors fausse et celle sur les frères Dupré vraie (l'un en Angleterre et l'autre en Grèce) est vraie.
  A ce point, il ne manque que l'autre frère qui est allé en Angleterre. Par exclusion, on en déduit que c'est un des frères Dumont.

Niveaux : 7 - 8
Origine : Lodi

16. LE TERRAIN DU PÈRE FRANÇOIS (Cat. 7, 8)

Le père François veut partager son champ rectangulaire entre ses trois fils, par deux clôtures rectilignes issues du sommet A, de manière que les trois parts soient de même aire.



Ce dessin représente un premier schéma de partage, mais le père François se rend bien compte qu'il faudra l'ajuster.

Où faudra-t-il placer les extrémités E et F des clôtures, sur les côtés BC et CD pour que le partage soit équitable ?
Indiquez précisément la position de ces points et justifiez-la.

ANALYSE A PRIORI
Domaine de connaissances
- Géométrie : rectangle, triangle et leurs mesures, généralisation d'une relation
- Algèbre: attribution de variable, calcul littéral

Analyse de la tâche
- Comprendre que les deux clôtures (deux segments) sont disposées de façon que les trois triangles ainsi formés soient équivalents, c'est-à-dire que leur aire soit le tiers de l'aire du rectangle.
- Désigner par *a* et *b* les dimensions du rectangle (respectivement base et hauteur ou vice-versa), exprimer l'aire (*ab*) et calculer l'aire que doit avoir chaque partie: (*ab*)/3)
  Comprendre que *b* est un côté du triangle ADF et *a* un côté du triangle ABE.
  Calculer DF $=2\left(\frac{ab}{3}\right): b = \frac{2}{3}a$ et EB$= 2\left(\frac{ab}{3}\right): a = \frac{2}{3}b$ et conclure que le point E doit être à une distance 2/3*b* du sommet B et le point F à une distance 2/3*a* du sommet D.
- Ou mesurer les dimensions du rectangle de la figure, à la règle (cm.7,8 et cm.3,6) et en calculer l'aire (28,08), puis l'aire de chaque parte (9,36) ; calculer la mesure de BE (18,72:7.8=2,4) et la mesure de DF (18,72:3,6=5,2), et placer ensuite les segments.
- Ou choisir pour le rectangle des mesures hypothétiques (par exemple : dimensions 15 et 6), faire un dessin sur papier quadrillé ou un schéma et les calculs correspondants comme précédemment, pour en conclure que les points E et F sont aux deux tiers des côtés correspondants, à partir de B et de D respectivement.

Niveaux : 7 - 8
Origine : C.I.

17. LA PINÈDE (Cat. 8)

Aldo possède une belle villa entourée d'un petit bois de pins. Malheureusement, ces arbres sont devenus secs pour cause de maladie et Aldo décide de les couper à la tronçonneuse. Il dit à son ami Louis qu'il réussira à effectuer ce travail en 6 heures. Louis, qui a une tronçonneuse plus puissante, affirme qu'il ferait ce travail en 4 heures.

S'ils travaillaient ensemble, combien de temps mettraient-ils pour couper tous les pins malades ?
Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI
Domaine de connaissances
- Arithmétique : multiples, fractions
- Algèbre: équations du premier degré

Analyse de la tâche
- Utiliser un schéma de 12 carrés représentant l'ensemble du bois, par exemple :

A	A	L	L	L							

  En une heure, Aldo couvre 2 carrés et Louis en couvre 3, donc, ensemble, 5 carrés; si 5 carrés correspondent à 60 minutes, 1 carré correspond à 12 minutes et, par conséquent, il mettront 2 heures et 24 minutes.
- Ou utiliser des fractions et une équation du premier degré pour rechercher la solution, en choisissant l'heure comme unité de temps :
  $1/4+1/6 = 5/12$ du travail effectué en 1 heure ; $1/12$ correspond à 12 minutes, c'est-à-dire $1/5$ d'heure, et ainsi les deux amis mettent ensemble 2 heures et 24 minutes.
  Si on désigne par a la durée totale du travail lorsqu'ils sont ensemble (en heures), et les « vitesses » respectives des deux amis, alors l'équation devient $a/4+a/6 = 1$ et sa solution est $a = 12/5$ d'heure, c'est-à-dire 2h+2/5h, qui signifie 2 heures et 24 minutes.

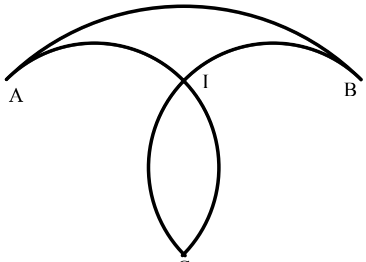
Niveau : 8
Origine : Riva del Garda

18. LE CHAMPIGNON (Cat. 8)

Pour représenter un champignon, Daniela a dessiné cette figure, en trois arcs de cercle :

- un quart de cercle d'extrémités A et B de centre C et de 8 cm de rayon;
- un demi-cercle d'extrémités A et C ;
- un demi-cercle d'extrémités B et C .

Elle a ensuite colorié le « chapeau » et le « pied » du champignon.



Daniela est persuadée que le périmètre du chapeau est beaucoup plus grand que celui du pied du champignon, mais il lui semble que l'aire du pied est plus grande que celle du chapeau.

Qu'en pensez-vous ?

Trouvez les rapports entre les périmètres et entre les aires des deux parties de la figure.

Justifiez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

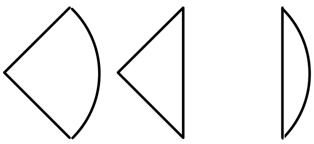
Domaine de connaissances

- Géométrie: cercle et disque; équivalence de figures planes
- Logique : démonstration

Analyse de la tâche

- Observer la figure, la redessiner ou la subdiviser pour comprendre comment s'articulent ses différentes parties, que le rayon de chacun des deux demi-cercles est la moitié du rayon du quart du « grand » cercle, AB, que les deux demi-cercles se divisent chacun en deux parties égales, AI et IC d'une part, BI et IC d'autre part, que le triangle ABC est rectangle en C, ...
- Le calcul des périmètres peut se faire algébriquement ou en prenant la valeur du rayon.
  si r est le rayon des « petits » cercles, le périmètre du « pied » est $2(2\pi r/4) = \pi r$, le périmètre du « chapeau » est $\pi r + 2\pi(2r)/4 = 2\pi r$, c'est-à-dire le double de celui du « pied ». Avec une valeur de $r = 4$, on trouve 4π et 8π ou des approximations comme $\approx 12{,}56$ et $\approx 25{,}12$ (à ne pas confondre avec les nombres
- La comparaison des aires peut se faire par soustractions. Celle d'un demi-pied (segment de disque) est la différence entre l'aire d'un quart de disque et celle d'un triangle (fig. 1). L'aire du pied est $2\pi r^2/4 - 2r^2/2 = \pi r^2/2 - r^2$
  L'aire du chapeau est celle d'un quart de « grand disque » à laquelle on soustrait successivement le triangle et les deux « petits » segments de disque (v. fig. 2): $\pi(4r^2)/4 - 4r^2)/2 - (\pi r^2/2 - r^2) = \pi r^2/2 - r^2$ et l'on constate ainsi l'équivalence des deux figures. Avec la valeur de $r = 4$, on trouverait $8\pi - 16$ ou, avec l'approximation scolaire de π par 3,14 l'aire de chaque partie serait $\approx 9{,}12$.
- On peut aussi ne pas effectuer les calculs en affirmant de manière explicite que, par exemple, les « petits » segments de disque valent le quart du « grand » étant donné que le rayon de ce dernier est le double de celui des premiers.

fig 1



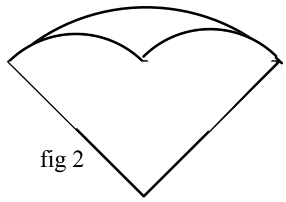


fig 2

Niveau : 8

Origine : Siena+ PR+CI